# Kombinatorika és gráfelmélet 2.

12. és 13. gyakorlat, 2020. december 4 és 11.

*Homogén lineáris rekurziók, Catalan számok, generátorfüggvények, véges projektív síkok*

Fibonacci számok: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és minden $n > 1$-re $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Ekkor

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

1. Oldjuk meg az $a_0 = 1, a_1 = 0\ \ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ rekurziót.

2. Oldjuk meg az $a_0 = 3, a_1 = -3\ \ a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ rekurziót.

3. Oldjuk meg az $a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 0\ \ a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ rekurziót.

4. Hányféleképpen mehetünk fel egy $n$ fokból álló lépcsőn egyes és kettes lépésekkel?

5. Hányféleképp lehet lefedni egy $2 \times n$-es táblát $1 \times 2$-es és $2 \times 2$-es dominók felhasználásával?

6. Oldjuk meg az $a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ \ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$ *nem homogén* lineáris rekurziót.

7. Tegyük fel, hogy valamilyen $K$ számra $a_n = 2Ka_{n-1} - K^2 a_{n-2}$.

   a. $a_0 = 1,\ a_1 = K$. Bizonyítsuk be, hogy $a_n = K^n$.

   b. $a_0 = 0,\ a_1 = K$. Bizonyítsuk be, hogy $a_n = nK^n$.

8. Adjuk meg állandó együtthatós lineáris rekurzióval $c_n$-t, ha $c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{-\sqrt{17}-3}{2}\right)^n$.

9. Legyen $a_1 = 0$ és $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + n^2 - 1$. Adjuk meg $a_n$ értékét zárt alakban. Ugyanez a feladat $a_1 = -1$ és $a_{n+1} = 2a_n + n + 1$ esetén.

10. Oldjuk meg az $a_0 = 1,\ \ a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ rekurziót.

11. Legyen $g_0 = 1$ és $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + \ldots + (n-1)g_1 + ng_0$. Adjuk meg $g_n$-t zárt alakban.

12. Mi a generátorfüggvénye az $1, 1, 1, \ldots$, az $1, 2, 4, 8, \ldots$, az $1, 2, 3, 4, \ldots$ és az $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ sorozatoknak?

13. Hogyan írhatók fel a $c_n$ sorozat elemei az $a_n$, és $b_n$ sorozat elemeivel, ha generátorfüggvényeikre teljesül, hogy $C(x) = A(x)B(x)$.

14. Jelentse $g(n)$ az origóból induló olyan önmagát nem metsző $n$ hosszú séták számát, melyekben minden lépés egy egységnyi északi, keleti vagy nyugati irányban. Fejezzük ki $g(n)$ értékét!

15. Legyen az $a_0, a_1, \ldots$ sorozatra $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = x$. Határozzuk meg, hogy milyen $x$–re lesz $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

16. Egy mozi pénztáránál $2n$ gyerek áll sorba 1000Ft-os jegyekért. Közülük $n$ fizet ezressel, $n$ pedig kétezressel. Kezdetben a pénztárban nincs pénz. Hányféleképp állhatnak sorba a gyerekek úgy, hogy a pénztáros mindig tudjon visszaadni?

17. Határozzuk meg hogy hányféleképpen lehet egy konvex $n$–szöget (a csúcsok meg vannak számozva) átlókkal háromszögekre bontani.

18. Határozzuk meg hogy hány olyan permutációja van az $1, 2, \ldots, n$ számoknak, ami elkerüli az (132) mintát. Más szóval, nem található a permutációban olyan három elem, $a_i$, $a_j$, $a_k$, $i < j < k$, amelyekre $a_j > a_k > a_i$.

19. $n$ hangya van egy szűk járat végében, amiből középen egy „zsákutca” ágazik ki. Sem a járatban, sem a mellékágban nem fér el egymás mellett két hangya. Ha a főágban nem fordulhatnak vissza a hangyák, akkor hányféle sorrendben jöhetnek ki abból a másik végén?

20. Hányféle sorrendben mehet be egy termebe 15 fiú és 12 lány úgy, hogy közben a termben soha se legyen több lány, mint fiú?

21. Egy urnában 25 piros, 25 fehér és 50 zöld golyó van. Hányféle sorrendben vehetjük ki az urnából a benne lévő 100 golyót, ha mindig legalább annyi piros golyónak kell az urnában lennie, mint fehérnek, és a zöld golyók sosem kerülhetnek többségbe?

22. egy $([n], \mathcal{F})$, $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ halmazrendszert véges projektív síknak hívunk, ha

    a. Bármely két ponthoz (elemhez) pontosan egy egyenes (halmaz) van, ami tartalmazza őket.
    b. Bármely két egyeneshez (halmazhoz) pontosan egy pont (elem) van, ami mindkettőben benne van.
    c. Létezik négy pont (elem) úgy, hogy semelyik három sincs egy egyenesen (halmazban).

    Bizonyítsuk be, hogy bármely két egyenesnek ugyanannyi pontja van.

    Bizonyítsuk be, hogy bármely két ponton át ugyanannyi egyenes van.

    Mutassunk olyan halmazrendszert, ami kielégíti az a. és b. feltételeket, és van két egyenes, amelyeknek nem ugyanannyi pontjuk van.

    Egy projektív sík rendje $q$, ha minden egyenesén $q+1$ pont van.

23. Egy véges projektív sík pontjainak $H$ részhalmaza *általános helyzetű*, ha nincs három olyan $H$-beli pont, amik egy egyenesre esnek. Mutassuk meg, hogy egy $q$ rendű projektív sík legfeljebb $q+2$ általános helyzetű pontot tartalmazhat. Igazoljuk, hogy ha $q$ páratlan, akkor még ennyi sem létezik.

24. Egy véges projektív sík pontjainak $H$ részhalmaza *lefogó ponthalmaz*, ha a síknak nincs $H$-tól diszjunkt egyenese. Mutassuk meg, hogy egy $q$ rendű projektív sík lefogó ponthalmaza legalább $q+1$ pontot tartalmaz. Igazoljuk, hogy minden $q+1$ pontú lefogó ponthalmaz egyenes. Bizonyítsuk be, hogy $q$ rendű projektív síkon nem létezik általános helyzetű lefogó ponthalmaz.

25. Bizonyítsuk be, hogy az egyszerű mohó eljárással legalább $\sqrt{2q}$ méretű általános helyzetű ponthalmazt kaphatunk.