

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

12. és 13. gyakorlat, 2020. december 4 és 11.

Homogén lineáris rekurziók, Catalan számok, generátorfüggvények, véges projektív síkok

Tudnivalók, megoldások.

Fibonacci számok: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és minden $n > 1$ -re $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Ekkor

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Catalan számok: $C_0 = 1$, $C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}$. Ekkor $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Néhány definíció a Catalan számra:

1. Az n nyitó és n záró zárójelből álló érvényes zárójelezések száma. Érvényes: az elejétől akármeddig legfeljebb annyi $)$ van, mint $($.
2. Egy $n+1$ tagú szorzat különböző, teljes zárójelezéseinek a száma. Teljes zárójelezés: nem maradhat egymás mellett három tényező.
3. Az $n+1$ levelű, lerajzolt, gyökeres teljes bináris fák száma. Lerajzolt: megkülönböztetjük egy csúcs jobb és bal gyerekeit.
4. Az $n+1$ csúcsú, lerajzolt, gyökeres fák száma, ahol egy csúcsnak sincs pontosan egy gyereke.
5. A $(0,0)$ -ból az (n,n) -be vezető monoton utak száma, amely soha nem megy az $x = y$ egyenes fölé. Monoton út: minden lépésben eggyel fel, vagy eggyel jobbra lépünk.
6. Egy $n+2$ csúcsú konvex sokszög különböző háromszögeléseinek a száma. A csúcsok meg vannak számozva, és csak átlókat használunk a háromszögeléshez.
7. Egy (számozott csúcsú) konvex $2n$ -szög csúcsai közötti metszés nélküli teljes párosítások száma.
8. Az $1, 2, \dots, n$ elemek olyan permutációinak a száma, amelyek elkerülnek egy adott, 3 hosszú mintát. Minta: az $1, 2, 3$ számok egy permutációja. Egy permutációban pl egy $(2, 1, 3)$ -minta: $\dots a \dots b \dots c \dots$, $b < a < c$.

1. Oldjuk meg az $a_0 = 1, a_1 = 0$ $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ rekurziót.

Megoldás: $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$

2. Oldjuk meg az $a_0 = 3, a_1 = -3$ $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ rekurziót.

Megoldás: $a_n = 3 \cdot (-3)^n - 2n \cdot (-3)^n$

3. Oldjuk meg az $a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 0$ $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ rekurziót.

Megoldás: $a_n = -2^n - 2(-1)^n + 6 \cdot 1^n$

4. Hányféleképpen mehetünk fel egy n fokból álló lépcsőn egyes és kettős lépésekkel?

Megoldás: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, az utolsó lépés szerint csoportosítva. $a_0 = a_1 = 1$, szóval $a_n = F_{n+1}$.

5. Hányféleképp lehet lefedni egy $2 \times n$ -es táblát 1×2 -es és 2×2 -es dominók felhasználásával?

Megoldás: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, a bal alsó sarokbeli dominó alapján. $a_1 = 1, a_2 = 3$, ebből $s_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n$.

6. Oldjuk meg az $a_0 = 0, a_1 = 0$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$ nem homogén lineáris rekurziót.

Megoldás: A $b_n = a_n + 1$ sorozatra $b_0 = 1, b_1 = 1, b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$, tehát $b_n = F_{n+1}$
 $a_n = F_{n+1} - 1$.

7. Tegyük fel, hogy valamilyen K számra $a_n = 2Ka_{n-1} - K^2a_{n-2}$.

a. $a_0 = 1, a_1 = K$. Bizonyítsuk be, hogy $a_n = K^n$.

b. $a_0 = 0, a_1 = K$. Bizonyítsuk be, hogy $a_n = nK^n$.

Megoldás: A kezdeti értékek és a rekurzió egyértelműen meghatározzák a sorozatot, és ezek teljesülnek az (a) $a_n = K^n$ illetve (b) $a_n = nK^n$ sorozatra. (b: K kétszeres gyök, ezért a deriválnak is gyöke.)

8. Adjuk meg állandó együtthatós lineáris rekurzióval c_n -t, ha $c_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{17}-3}{2} \right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{-\sqrt{17}-3}{2} \right)^n$.

Megoldás: A karakterisztikus egyenletnek gyökei a hatványalapok, ezért biztos teljesül minden olyan rekurzió c_n -re, ami a két mértani sorra is. Tekintsük azt a polinomot, aminek a két a alap a megoldása: $(x - \frac{\sqrt{17}-3}{2})(x - \frac{-\sqrt{17}-3}{2}) = x^2 + 3x - 2$, vagyis $c_{n+2} = -3c_{n+1} + 2c_n$.

9. Legyen $a_1 = 0$ és $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + n^2 - 1$. Adjuk meg a_n értékét zárt alakban. Ugyanez a feladat $a_1 = -1$ és $a_{n+1} = 2a_n + n + 1$ esetén.

Megoldás: $b_n := a_n/n$ -re $b_{n+1} = b_n + n - 1$, és innen $b_n = a_1 + 1 + 2 + \dots + n - 2 = \binom{n-1}{2}$, vagyis $a_n = n \binom{n-1}{2}$. A másik: $b_n = a_n + n + 2$ esetén $b_{n+1} = 2a_n + n + 1 + n + 3 = 2b_n$, és $b_1 = 2$ miatt $b_n = 2^n$, szóval $a_n = 2^n - n - 2$.

10. Oldjuk meg az $a_0 = 1, a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ rekurziót.

Megoldás: Legyen $b_n = a_n - 5 \cdot 10^{n-1}$. Ekkor $b_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1} - 5 \cdot 10^{n-1} = 8a_{n-1} - 40 \cdot 10^{n-2} = 8b_{n-1}$. Tehát $a_n = -2^{3n+2}$. Tehát $a_n = -2^{3n+2} + 5 \cdot 10^{n-1}$.

Lehet állandó együtthatós rekurzióra is visszavezetni: $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ és $10a_{n-1} = 80a_{n-2} + 10^{n-1}$, amiket egymásból kivonva az jön ki, hogy $a_n = 18a_{n-1} - 80a_{n-2}$, és a karakterisztikus egyenlet gyökei a 8 és 10 lesznek.

11. Legyen $g_0 = 1$ és $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + \dots + (n-1)g_1 + ng_0$. Adjuk meg g_n -t zárt alakban.

Megoldás: $g_{n+1} - g_n = \sum_{i=0}^n g_i$, ill $g_n - g_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} g_i$, amiket egymásból kivonva kapjuk, hogy $g_{n+1} - g_n = g_n - g_{n-1} + g_n$, azaz $g_{n+1} = 3g_n - g_{n-1}$. Mivel $g_0 = g_1 = 1$, innen rutin.

12. Mi a generátorfüggvénye az $1, 1, 1, \dots$, az $1, 2, 4, 8, \dots$, az $1, 2, 3, 4, \dots$ és az $1, 0, 1, 0, 1, \dots$ sorozatoknak?

Megoldás: $\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1-2x}, (1/(1-x))' = 1/(1-x)^2, \frac{1}{1-x^2}$.

13. Hogyan írhatók fel a c_n sorozat elemei az a_n , és b_n sorozat elemeivel, ha generátorfüggvényeikre teljesül, hogy $C(x) = A(x)B(x)$.

Megoldás: $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ a definíció alapján.

14. Jelentse $g(n)$ az origóból induló olyan önmagát nem metsző n hosszú séták számát, melyekben minden lépés egy egységnyi északi, keleti vagy nyugati irányban. Fejezzük ki $g(n)$ értékét!

Megoldás: $g_{n+2} = 2g_{n+1} + g_n$, mert az utolsó lépés legalább 2-féle mindig lehet, és akkor lehet 3-féle, ha utolsónak függőleges volt. $g_0 = 1, g_1 = 3$.

$g_n = (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2})(1 + \sqrt{2})^n + (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2})(1 - \sqrt{2})^n$.

15. Legyen az a_0, a_1, \dots sorozatra $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = x$. Határozzuk meg, hogy milyen x -re lesz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Megoldás: Az jön ki, hogy $a_n = 2^n + \frac{x-2}{2}n2^n$. Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ akkor és csak akkor, ha $\frac{x-2}{2} < 0$ vagyis $x < 2$.

16. Egy mozi pénztáránál $2n$ gyerek áll sorba 1000Ft-os jegyekért. Közülük n fizet ezressel, n pedig kétezressel. Kezdetben a pénztárban nincs pénz. Hányféleképp állhatnak sorba a gyerekek úgy, hogy a pénztáros mindig tudjon visszaadni?

Megoldás: Minden gyerek egy zárójelnek felel meg, akinek 1000-e van az nyitó, akinek 2000-e van, az záró. n pár van, szóval a válasz $C_n \cdot n!^2$.

17. Határozzuk meg hogy hányféleképpen lehet egy konvex n -szöget (a csúcsok meg vannak számozva) átlókkal háromszögekre bontani.

Megoldás: Catalan: nézzük meg, hogy az 1-es csúcsból melyik a legkisebb sorszámú csúcs, amivel össze van kötve. Pont a Catalan rekurziót kapjuk.

18. Határozzuk meg hogy hány olyan permutációja van az $1, 2, \dots, n$ számoknak, ami elkerüli az (132) mintát. Más szóval, nem található a permutációban olyan három elem, $a_i, a_j, a_k, i < j < k$, amelyekre $a_j > a_k > a_i$.

Megoldás: Ez is Catalan: nézzük meg, hogy hol van az n . Az előtte levő elemek mind nagyobbak az utána levőknél, szóval egyértelmű, kik lesznek előtte illetve utána. A két részre rekurzió, pont a Catalan rekurziót kapjuk megint.

19. n hangya van egy szűk járat végében, amiből középen egy „zsákutca” ágazik ki. Sem a járatban, sem a mellékágban nem fér el egymás mellett két hangya. Ha a főágban nem fordulhatnak vissza a hangyák, akkor hányféle sorrendben jöhetnek ki abból a másik végén?

Megoldás: Jelölje h_n a választ. Ekkor $h_0 = 1$, és $h_{n+1} = \sum_{i=0}^n h_i h_{n-i}$, az összegzésünk aszerint történik, hogy az első hangya hány hangyát enged maga elé. Tehát $h_n = C_n$. Más bogárral is ugyanígy megy.

20. Hányféle sorrendben mehet be egy terembe 15 fiú és 12 lány úgy, hogy közben a termben soha se legyen több lány, mint fiú?

Megoldás: Tükrözési elv. Megszámoljuk hány megfelelő $f-l$ sorrend van, amiben 15 f és 12 l szerepel, és ezt megszorozzuk $15! \cdot 12!$ -sal. Az összes $f-l$ sorrend száma $\binom{27}{15}$, de ebben benne vannak a rosszak, amikor egy pillanatban több lesz a lány. Az ilyen rossz sorrendeket számoljuk meg. Tekintsük a rossz $f-l$ sorrendben az első lány-többségi pillanatot. A sorrend további részében cseréljük fel az f és l jeleket. Így a sorrend 11 db f -t és 16 l -t fog tartalmazni és minden ilyen pontosan egyszer kapunk meg. Ezért $\binom{27}{16}$ a rossz sorrendek száma, vagyis a válasz $15! \cdot 12! \left(\binom{27}{15} - \binom{27}{16} \right)$.

21. Egy urnában 25 piros, 25 fehér és 50 zöld golyó van. Hányféle sorrendben vehetjük ki az urnából a benne lévő 100 golyót, ha mindig legalább annyi piros golyónak kell az urnában lennie, mint fehérnek, és a zöld golyók sosem kerülhetnek többségbe?

Megoldás: A piros-fehér sorrendek száma (a zöldeket figyelmen kívül hagyva) C_{25} . Most vonjuk össze a pirosakat és fehéreket. Így a pirosfehér-zöld sorrendek száma C_{50} , és ez a kettő egyértelműen meghatározza a sorozatot, szóval a válasz $C_{25} \cdot C_{50}$.

22. egy $([n], \mathcal{F})$, $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ halmazrendszer véges projektív síknak hívunk, ha

- Bármely két ponthoz (elemhez) pontosan egy egyenes (halmaz) van, ami tartalmazza őket.
- Bármely két egyeneshez (halmazhoz) pontosan egy pont (elem) van, ami mindkettőben benne van.
- Létezik négy pont (elem) úgy, hogy semelyik három sincs egy egyenesen (halmazban).

Bizonyítsuk be, hogy bármely két egyenesnek ugyanannyi pontja van.

Bizonyítsuk be, hogy bármely két ponton át ugyanannyi egyenes van.

Mutassunk olyan halmazrendszert, ami kielégíti az a. és b. feltételeket, és van két egyenes, amelyeknek nem ugyanannyi pontjuk van.

Megoldás: 1. Vegyünk két egyenest. Először is keresünk egy pontot, ami egyiken sincs rajta. Vegyünk négy pontot, amiből semelyik 3 sincs egy egyenesen, a, b, c, d . Ha ezek közül valamelyik nincs rajta egyik egyenesen sem, akkor megtaláltuk a keresett pontot. Ha nem, akkor kettő, mondjuk a, b az egyik egyenesen van, c, d a másikon. Most vegyük az ac és bd egyeneseket, ezeknek az m metszéspontjáról könnyen látszik, hogy egyik egyenesen sincs rajta.

Most pedig párba állítjuk a két egyenes pontjait úgy hogy m -ből vetítünk.

2. Legyen A egy pont. Először keresünk egy egyenest, amin A nincs rajta. Legyen a egy egyenes. Ha nincs rajta A , akkor megvan. Tegyük fel, hogy rajta van. Legyen B egy másik pont a -n. Vegyünk egy a -n kívüli pontot, C -t. Ilyen van, a $[c]$ miatt. Végül legyen e a BC egyenes. Ez nem illeszkedhet A -ra, mert akkor a -nak és e -nek két metszéspontja lenne, B és A . Most pedig az e pontjai és az A -na átmenő egyenesek között természetes bijekció van: minden A -n átmenő egyenes pontosan egy pontban metszi e -t és minden pont e -n A -val együtt meghatároz egy A -n átmenő egyenest. Tehát ugyanannyi egyenes megy át A -n ahány pont van e -n. Az előzőből tudjuk, hogy minden egyenesen ugyanannyi pont van, ezért tehát minden ponton át is ugyanannyi egyenes van.

3. Pelda: „near-pencil”, $n - 1$ pont egy egyenesen, egy rajta kívül. Így van egy $n - 1$ pontú egyenes, és $n - 1$ 2 pontú.

EGY PROJEKTÍV SÍK RENDJE q , HA MINDEN EGYENESÉN $q + 1$ PONT VAN.

23. Egy véges projektív sík pontjainak H részhalmaza *általános helyzetű*, ha nincs három olyan H -beli pont, amik egy egyenesre esnek. Mutassuk meg, hogy egy q rendű projektív sík legfeljebb $q + 2$ általános helyzetű pontot tartalmazhat. Igazoljuk, hogy ha q páratlan, akkor még ennyi sem létezik.

Megoldás: H egy pontjából induló $q + 1$ egyenes mindegyikén legfeljebb további egy H -beli pont van, ez összesen $q + 2$ pont. Tegyük fel, hogy q páratlan és H $q + 2$ pontú. Ha egy nem H -beli pontból nézünk körül, akkor lesz olyan egyenes, amin csak egy H -beli pont lesz, mondjuk h . Ekkor a h -ből induló $q + 1$ egyenesből csak q egyenesen lehet egy-egy további pontja H -nak, ellentmondás.

24. Tegyük fel, hogy a projektív síkok mindegyikére igaz egy állítás. Mutassuk meg, hogy az az állítás is igaz lesz minden projektív síkra, amit az említettből a pontok és egyenesek szerepének értelemszerű felcserélésével kapunk. Pl az előző feladat állításának duálisa az alábbi. Egy lineáris tér egyeneseseinek E halmaza *általános helyzetű*, ha nincs három olyan E -beli egyenes, amik ugyanazon a ponton mennek át. Mutassuk meg, hogy egy q rendű projektív sík legfeljebb $q + 2$ általános helyzetű egyenest tartalmazhat. Igazoljuk, hogy ha q páratlan, akkor még ennyi sem létezik. Dualizáljuk a lefogó ponthalmazokról szóló feladat állítását.

Megoldás: A projektív sík axiomáiban a pont és egyenes szerepe felcserélhető.

25. Egy véges projektív sík pontjainak H részhalmaza *lefogó ponthalmaz*, ha a síknak nincs H -től diszjunkt egyenese. Mutassuk meg, hogy egy q rendű projektív sík lefogó ponthalmaza legalább $q + 1$ pontot tartalmaz. Igazoljuk, hogy minden $q + 1$ pontú lefogó ponthalmaz egyenes. Bizonyítsuk be, hogy q rendű projektív síkon nem létezik általános helyzetű lefogó ponthalmaz.

Megoldás: Egy H -n kívüli pontból induló $q + 1$ egyenes mindegyikét le kell fogni. Ha $|H| = q + 1$, és H nem egy egyenes, akkor egy H pontjai által meghatározott l egyenesen van H -n kívüli pont, és nem lesz minden innen induló egyenes lefogva. Ha egy ponthalmaz általános helyzetű, akkor legfeljebb $q + 2$ pontja van, tehát legfeljebb $\binom{q+2}{2} = \frac{(q+2)^2}{2} + 1 + \frac{1}{2} < q^2 + q + 1$ egyenest fog le, ami kevesebb, mint az összes.

26. Bizonyítsuk be, hogy az egyszerű mohó eljárással legalább $\sqrt{2q}$ méretű általános helyzetű ponthalmazt kaphatunk.

Megoldás: Tegyük fel, hogy van $t < \sqrt{2q}$ darab általános helyzetű pontunk. Ezek összesen $\binom{t}{2}$ egyenest határoznak meg, mindegyiken van további $q - 1$ pont. Ez összesen $t + \binom{t}{2}(q - 1) < q^2 + q + 1$ tehát találhatunk még egy pontot, amivel bővíthetjük a halmazunkat.