Kombinatorika és gráfelmélet 2.

1. gyakorlat, 2020. szeptember 11.

Perfekt gráfok

Tudnivalók

$\omega(G)$: klikkszám, legnagyobb teljes részgráf mérete.
$\chi(G)$: kromatikus szám, G (jó) színezéséhez szükséges színek száma.

G gráf perfekt, ha minden feszített G' részgráfjára (magát G-t is bleértve) $\chi(G') = \omega(G')$.

Intervallumgráf: csúcsok megfelelnek intervallumoknak egy egyenesen, két csúcs össze van kötve akkor és csak akkor, ha a megfelelő intervallumok metszik egymást.

Páros gráfok, intervallumgráfok, ezek komplementerei, páros gráfok élgráfjai perfektek.

Gyenge Perfekt Gráf Tétel (Lovász 72): G perfekt akkor és csak akkor, ha $\overline{G}$ perfekt.

Erős Perfekt Gráf Tétel (Chudnovsky, Roberts, Seymour, Thomas, 2002): G perfekt akkor és csak akkor, ha nem tartalmaz feszített részgráfként egy legalább 5 hosszú páratlan kört illetve komplementerét.

1. (Shift gráf) Legyen $m > 1$. Az S_m shift gráf csúcsai legyenek az (i, j) számpárok, ahol $1 \leq i < j \leq m$. (Elképzelhetjük (i, j)-t egy intervallumnak is.) Két csúcs, mondjuk (i, j) és (i', j') akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $i = j'$ vagy $j = i'$. Vagyis ha az egyik intervallum ott végződik, ahol a másik kezdődik.

   a. Bizonyítsuk be, hogy S_m nem tartalmaz háromszöget. b. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(S_m) \geq \log_2 m$.

   Megoldás: Kombi oldalon fent van.

2. Bizonyítsuk be, hogy a páros gráfok komplementerei perfektek.

   Megoldás: Elég: ha G páros gráf, akkor $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$.

   Legyen G páros gráf, A, B osztályokkal. $\overline{G}$ a komplementere. Max klikk $\overline{G}$-ben: $X \cup Y$, $X \subset A$, $Y \subset B$. Ekkor $X \cup Y$ max független G-ben. Áll: Van $A \setminus X$-et fedő párosítás $A \setminus X$ és Y között. Biz: Hall tétel. Nézzük az $A \setminus X \cup Y$ által feszített részgráfot. Ha lenne $Z \subset A \setminus X$ amire $|N(X)| < |Z|$, akkor $Y \setminus N(Z) \cup X \cup Z$ nagyobb független halmaz lenne, mint $X \cup Y$. Vagyis mindig $|N(X)| \geq |Z|$, tehát van $A \setminus X$-et fedő párosítás $A \setminus X$ és Y között. Ugyanígy: van $B \setminus Y$-t fedő párosítás $B \setminus Y$ és X között.

   Na, akkor $\overline{G}$-ben színezzük $X \cup Y$ pontjait mind különböző színűre. Tekintsük a fenti párosításokat G-ben. Ha $v \in A \setminus X$, akkor színezzük az Y-beli párjának a színére. Hasonlóan, ha $v \in B \setminus Y$, akkor színezzük az X-beli párjának a színére. Sikerült ω színnel kiszínezni, $\chi = \omega$, kész!

3. Bizonyítsuk be, hogy az intervallumgráfok komplementerei perfektek.

   Megoldás: Legyen $\omega(G) = k$. Mohó színezés bal végpont szerint jobbról balra. Ha I-re nem talalnánk színt: k se jó, van előtte egy k-színű intervallum. Az meg azert k-színű, mert van előtte egy $k-1$-színű intervallum.....

   Végül találunk $k + 1$ diszjunk intervallumot, ami ellentmondás, mert $\omega(G) = k$. Kész.

4. a. Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami nem intervallumgráf. b. Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami nem intervallumgráf komplementere.

   Megoldás: a. C_4, 4 hosszú kör, vagy $K_{1,3}$, 3 ágú csillag. b. Ezek komplementere.

5. A G gráfot *ívgráfnak* hívjuk, ha a csúcsai megfelelnek intervallumoknak (íveknek) egy körön, két csúcs össze van kötve, ha a megfelelő ívek metszik egymást.

   a. Mutassunk olyan ívgráfot, amely nem perfekt.

   b. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy ívgráf, akkor $\chi(G) \leq 2\omega(G)$.

Megoldás: a. C_5 5 hosszú kör. b. Vegyünk a körön egy tetszőleges pontot, ezt max omega ív tartalmazza, ezeket színezzük csupa különböző színnel. Ha ezeket elhagyjuk, akkor viszont egy intervallum gráfot kapunk, tehát a többire is elég $\omega(G)$ szín.

6. Legyenek a G_n gráf csúcsai az $1, 2, 3, \ldots, n$ számok, és legyen ij él, ha i és j relatív prímek. Határozzuk meg a $\chi(G)$ és $\omega(G)$ paramétereket. Perfekt-e a G_n gráf? (Tegyük fel, hogy n elég nagy.)

   Megoldás: Ha vesszük n-ig az összes prímeg és az 1-et, ők egy klikket alkotnak. Ennyi színnel ki is lehet színezni: mindenki kapja a legkisebb prímosztója színét. Tehát $\chi = \omega =$ prímek száma $+1$. De nem perfekt, ha n elég nagy: $2 * 3$, $5 * 7$, $11 * 2$, $3 * 5$, $7 * 11$ egy 5 hosszú kört feszítenek.

7. Képezzük a G' gráfot a G perfekt gráfból úgy, hogy egy G-től diszjunkt v csúcsot összekötünk G egy klikkjének minden csúcsával. Mutassuk meg, hogy G' is perfekt gráf.

   Megoldás: Legyen K a klikk, amivel összekötjük v-t. Ha K maximális klikk volt, akkor ω és χ is nő eggyel. Ha nem volt maximális, akkor meg egyik se nő. Tehát egyenlőek maradnak.

   Ugyanígy lehet érvelni a feszített részgráfokra is.

8. A G gráf csúcsai legyenek a 8×8-as sakktábla mezői, és két mező akkor legyen szomszédos G-ben, ha lóugrásnyira vannak egymástól. (A huszár mindig egy 3×2-es téglalap egyik csúcsából az átellenes csúcsába lép.) Mutassuk meg, hogy G perfekt. Mi a helyzet más figurákkal?

   Megoldás: Ló: páros gráfot kapunk, a két osztály a fehér illetve fekete mezők. Bástya: A mezők megfelelnek a $K_{8,8}$ teljes páros gráf éleinek, a bastyalépes-gráf: $K_{8,8}$ élgráfja, ami perfekt. Futó: hasonlóan. Király: van feszített C_7.

9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf pontosan akkor perfekt, ha G minden G' feszített részgráfjának van olyan független ponthalmaza, ami G' minden maximális méretű klikkjét metszi.

   Megoldás: Egyrészt ha van olyan független halmaz, ami minden maximális klikket metsz, akkor ezt kiszínezhetjük egy színnel, a maradék klikkszáma eggyel kisebb, ezt folytatva a gráf ω színnel színezhető, és minden feszített részgráfjára is ugyanígy érvelhetünk. Másrészt ha perfekt, akkor egy omega színnel való színezésének valamely színosztálya ilyen független halmazt ad.

10. a) Van olyan gráf, ami intervallumgráf, de nem egy intervallumgráf komplementere?
    b) Van olyan gráf, ami egy intervallumgráf komplementere, de nem intervallumgráf?

    Megoldás: a. Négy csúcs, két diszjunkt él. b. A komplementere, ami éppen egy 4 hosszú kör, C_4.

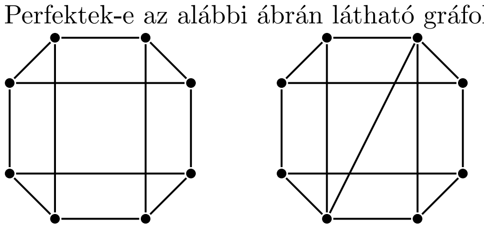
11. Írjuk le azokat a G gráfokat, amelyeknek minden H részgráfjára $\omega(H) = \chi(H)$.

    Megoldás: Páros gráfok, háromszögek, négyszögek átlóval, teljes négyesek illetve haromszögek összeillesztve egy-egy pontjuknál fa-szerűen. (Biz könnyű de vacakolós.)

12. A G gráf *splitgráf*, ha csúcshalmaza előáll egy klikk és egy független ponthalmaz uniójaként. Mutassuk meg, hogy minden splitgráf perfekt.

    Megoldás: Induljunk ki egy ilyen klikk+független felosztásból. Két eset van: vagy ez a klikk egy maximális klikk, vagy még egy csúcsot hozzávehetünk a függetlenek közül. Mindkét esetben a kimaradó pontok mindegyikéhez lesz olyan klikkbeli pont, amellyel nincs összekötve, azaz kaphatja a színét. Tehát $\chi = \omega$. Ugyanígy érvelhetünk a feszített részgráfokra is.

13. Perfektek-e az alábbi ábrán látható gráfok?



Megoldás: Első igen, mert páros, második nem, mert van benne feszített C_5.

14. Legyen adott egy T fa és ennek $F_1, \dots, F_n$ részfái. Megadunk egy G gráfot az $\{F_1, \dots, F_n\}$ halmazon: F_i és F_j $(i \neq j)$ akkor legyen szomszédos, ha van közös csúcsuk. Bizonyítsd be, hogy G perfekt!

    Megoldás: Hasonlóan mint az intervallumgráfoknál, mohón színezünk, a rendezés alapja a fa (egy szabadon választott) gyökerének és a részfa legközelebbi csúcsának a távolsága.

Házi feladat

Egy G gráf élgráfját $L(G)$-vel jelöljük.

1. Perfekt az $L(K_n)$ gráf?

2. Perfekt az $L(K_{n,n})$ gráf? És az $L(L(K_{n,n}))$ gráf?

3. (*)(Módosított shift gráf) Legyen $m > 1$. Az T_m módosított shift gráf csúcsai legyenek az (i, j, k) számhármasok, ahol $1 \leq i < j < k \leq m$. Két csúcs, mondjuk (i, j, k) és (i', j', k') akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $i = j'$ és $j = k'$, illetve ha $i' = j$ és $j' = k$. Vagyis ha az egyik hármas első két eleme ugyanaz, mint a másik hármas második két eleme.

a. Bizonyítsuk be, hogy T_m nem tartalmaz háromszöget. b. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(T_m) \longrightarrow \infty$ ha $m \longrightarrow \infty$.

Segítség b-hez: A megfelelő állítás bizonyítása sima shift gráfokra alapján. (Kombi2 oldalon fent van). Tegyük fel, hogy l színnel kiszíneztük a módosított shift gráfot (n jó nagy). Legyen $C_{i,j}$ azon színek halmaza, ami előfordul, mint (i, j, k) színe, valamilyen k-ra. Jelentsen most minden részhalmaz egy színt. Ekkor az $(i, j) \to C_{i,j}$ éppen a sima shift gráfnak egy megfelelő színezése! Emiatt l nem lehet túl kicsi n-hez képest...