

Aki szeretne pótzh-t írni bármelyik zh-ból, az írjon nekem egy e-mailt december 11-e estig!

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végig gondolása világosan kiderüljön a dolgozathoz. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Bizonyítsuk be, hogy $R(4, 3, 3, 2) \leq R(6, 4)$.

Először belátjuk, hogy $R(4, 3, 3, 2) \leq R(4, 3, 3)$. Ha egy $R(4, 3, 3)$ csúcsú teljes gráf éleit kiszínezzük pirossal, kékkel zölddel és sárgával, akkor vagy használtuk a sárga színt, és akkor találtunk egy sárga teljes 2 csúcsú gráfot, vagy nem használtuk, de akkor csak pirosat, kéket és zöldet használtunk, ezért $R(4, 3, 3)$ definíciója alapján van egy piros teljes 4-es, vagy kék illetve zöld teljes 3-as. (Valójában egyenlők, de ez itt nem kell.) 4 pont

Most pedig belátjuk, hogy $R(4, 3, 3) \leq R(4, 6)$. Színezzük ki az $R(4, 6)$ csúcsú teljes gráf éleit pirossal, kékkel és zölddel. Be kell látnunk, hogy mindenképpen lesz piros teljes 4-es, vagy kék illetve zöld teljes 3-as. Konstruáljunk egy új színezést, ahol a piros élek maradnak pirosak, a kék és zöld éleket hupikékre színezzük. $R(4, 6)$ definíciója alapján az új színezésben van egy piros teljes 4-es, vagy hupikék teljes 6-os. 3 pont

Az első esetben készen is vagyunk, a második esetben ezek szerint az eredeti színezésben van egy teljes 6-os, aminek minden éle kék vagy zöld. De tanultuk, hogy $R(3, 3) = 6$, ezért mindenképpen lesz az eredeti színezésben egy kék vagy zöld teljes 3-as. 3 pont

Összefoglalva: $R(4, 3, 3, 2) \leq R(4, 3, 3) \leq R(4, 6) = R(6, 4)$ tehát készen vagyunk! 1 pont

2. Legyen H egy 5 csúcsú gráf, egy él és egy háromszög diszjunkt uniója. Határozzuk meg $ex(n, H)$ értékét. (Legyen $n \geq 100$.)

A 2 osztályú Turán gráfnak $\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$ éle van, és nem tartalmaz háromszöget (három csúcsú teljes gráfot). Tehát nyilván H -t sem tartalmazza részgráfként. Ezért $ex(n, H) \geq \lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$. 4 pont

Vegyünk most egy $\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil + 1$ élű, n csúcsú G gráfot. A Turán (Mantel) tétel alapján, $ex(n, \Delta) = \lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$ ahol Δ a három csúcsú teljes gráfot jelenti. Tehát G tartalmaz egy uvw háromszöget. Tegyük fel, hogy H -val izomorf részgráfot viszont nem tartalmaz. Ekkor minden éle az u, v, w csúcsok valamelyikére illeszkedik. 3 pont

Vagyis G -nek legfeljebb $3 + 3(n - 3)$ éle lehet. De ez ellentmondás, mert $3 + 3(n - 3) < \lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$! Ezzel beláttuk, hogy G tartalmaz H -val izomorf részgráfot. 2 pont

Tehát $ex(n, H) = ex(n, \Delta) = \lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$. 1 pont

3. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy M szám a következő tulajdonsággal. Akárhogy színezzük ki az $1, 2, \dots, M$ számokat 2 színnel, léteznek egyszínű a, b, c számok, amelyekre $a + b = c + 100$ és $a, b, c > 100$.

A Schur tétel szerint minden $k > 0$ -ra létezik egy $N(k)$ szám a következő tulajdonsággal. Akárhogy színezzük ki az $1, 2, \dots, N(k)$ számokat k színnel, léteznek egyszínű a, b, c számok, amelyekre $a + b = c$. 1 pont

Legyen $M = N(2) + 100$. Színezzük ki az $1, 2, \dots, M$ számokat 2 színnel. Legyen ez az A színezés. Készítsünk ebből egy új, B színezést az $1, 2, \dots, N(2)$ számokon, a következő módon. A B színezésben x -et színezzük olyan színűre, amilyen $x + 100$ volt az A színezésben. 4 pont

A Schur tétel alapján a B színezésben van olyan x, y, z , amelyek egyszínűek és $x + y = z$. 2 pont

Legyen $a = x + 100$, $b = y + 100$, $c = z + 100$. Ekkor az A színezésben a, b, c egyszínűek és $a + b = x + y + 200 = z + 200 = c + 100$. És persze $a, b, c > 100$. 3 pont

4. Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[100]}$ metsző halmazrendszer és tegyük fel, hogy \mathcal{F} minden halmaza 49, 50, vagy 51 elemű. Határozzuk meg $|\mathcal{F}|$ lehetséges legnagyobb értékét.

Állítsuk párba a 49 és 51 elemű részhalmazokat úgy, hogy a párok éppen egymás komplementerei. Összesen $\binom{100}{49} = \binom{100}{51}$ pár van, és minden párból csak egy halmazt vehetünk be \mathcal{F} -be. 3 pont

Hasonlóan, állítsuk párba egymással az 50 elemű részhalmazokat úgy, hogy a párok éppen egymás komplementerei. Összesen $\binom{100}{50}/2$ pár van, és minden párból csak egy halmazt vehetünk be \mathcal{F} -be. 3 pont

Tehát $|\mathcal{F}| \leq \binom{100}{49} + \binom{100}{50}/2$. Ennyit viszont el is érhetünk: vegyük az összes 51 elemű részhalmazt, és minden 50 elemű részhalmaz-párból egyet. Nem lesz köztük két diszjunkt: az 51 eleműek metszenek minden 51 és 50 eleműt, az 50 eleműek között meg nem maradt komplementer pár. 4 pont

5. $G(A, B, E)$ egy páros gráf, $|B| = 20$. Tudjuk, hogy tetszőleges $b_1, b_2 \in B$ -hez létezik $a_1, a_2 \in A$ úgy, hogy a_i és b_j akkor és csak akkor szomszédosak, ha $i = j$. (Vagyis a_1b_1 és a_2b_2 szomszédosak, a_1b_2 és a_2b_1 nem.) Határozzuk meg $|A|$ minimális értékét.

Legyenek B elemei b_1, \dots, b_{20} . Legyen $A_i \subseteq A$ b_i szomszédainak a halmaza. Legyen $|A| = n$. 2 pont

A feltételek szerint ha $i \neq j$ akkor A_i nem részhalmaza A_j -nek. Vagyis az A_i részhalmazok Sperner rendszert alkotnak. 5 pont

A Sperner tétel alapján tehát legfeljebb $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ halmazunk lehet de mivel összesen 20 halmazunk van, $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \geq 20$. 2 pont

Ebből azt kapjuk, hogy $|A| = n$ minimális értéke 6. 1 pont

6. Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ 3-uniform halmazrendszer, $n > 3$. Tudjuk, hogy bármely 4 darab különböző, \mathcal{F} -hez tartozó halmaz metszete üres. Bizonyítsuk be, hogy $|\mathcal{F}| \leq n$.

1. megoldás:

Legyen $|\mathcal{F}| = m$. Az \mathcal{F} -hez tartozó halmazoknak összesen $3m$ eleme van. 4 pont

Ugyanakkor az alaphalmaznak semelyik eleme sem lehet benne 4 vagy több halmazban. Tehát minden elemet legfeljebb 3-szor számoltunk. 5 pont

Vagyis $3m \leq 3n$, így $m \leq n$. 1 pont

2. megoldás:

Tekintsük az \mathcal{F} halmazrendszerhez tartozó $G(A, B, E)$ páros gráfot. A pontjai felelnek meg az alaphalmaz elemeinek, B pontjai a halmazoknak, az élek a tartalmazást jelentik. Nyilván $|A| = n$, $|B| = m$. 2 pont

Mivel minden halmaz 3 elemű, B -ben minden fok 3, tehát $|E| = 3m$. 2 pont

Ugyanakkor a feltétel szerint minden A -beli csúcs foka legfeljebb 3. Tehát $|E| \leq 3n$. 5 pont

Ebből $3m \leq 3n$, így $m \leq n$. 1 pont