

Kombinatorika és gráfelmélet II
1. ZH, 2019. október 11. 12.05-13.35, T 603
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. G és H egyszerű, síkbarajzolt, páros, összefüggő gráfok. G -nek legalább 4 csúcsa van. Bizonyítsuk be, hogy nem lehetnek egymás duálisai.

Tegyük fel, hogy G és H egymás duálisai. Legyen G csúcsainak a száma n , a csúcsok fokai d_1, d_2, \dots, d_n , az élek száma e . Mivel G összefüggő, nincs izolált pontja tehát $d_i \geq 1$. 1 pont

Mivel a duális, H , egyszerű, nincs hurokéle és párhuzamos élei, ezért G -ben nincs 1-fokú illetve 2-fokú csúcs tehát $d_i \geq 3$. 2 pont

Mivel H páros gráf, nincs benne 3 hosszú kör (háromszög), ezért G -ben nincs 3-fokú csúcs sem, tehát $d_i \geq 4$. 2 pont

Ezért $2e = \sum_{i=1}^n d_i \geq 4n$ vagyis $e \geq 2n$. 2 pont

Viszont ez lehetetlen, mert G egy egyszerű, páros, legalább 4 csúcsú síkgráf, ezért $e \leq 2n - 4$. 3 pont

2. Egy síkbarajzolt G gráfra, n , e , t , k a csúcsok, élek, tartományok és összefüggő komponensek száma. Bizonyítsuk be, hogy $n - e + 1 \leq k + t$.

Az Euler formula alapján $n - e + t = 1 + k$. 3 pont

Nyilván $1 \leq t$, tehát $2 \leq 2t$. 4 pont

Ezt az egyenlőséget adjuk hozzá az Euler formulához: $n - e + t + 2 \leq 1 + k + 2t$, egyszerűsítve: $n - e + 1 \leq k + t$, és már kész is vagyunk! 3 pont

3. Adott n pont a síkon. Tekintsük ezeket egy gráf csúcsainak. Ket pontot (csúcsot) összekötünk éllel, ha a két pont távolsága legalább 1. Igaz, hogy az így kapott gráf mindig perfekt?

NEM! 0 pont

Tekintsünk egy szabályos ötszöget, amelynek az oldala éppen csak kisebb, mint 1. 4 pont

Az átlók így hosszabbak lesznek, mint 1. Tehát az oldalak nem lesznek behúzva a G gráfban, az átlók igen. 3 pont

Ez viszont éppen egy C_5 , ami nem perfekt. 3 pont

4. Tetszőleges G gráfra legyen $2G$ a következő gráf. Egymás mellé tesszük G két példányát, és a két példányban egymásnak megfelelő pontokat összekötjük egy-egy éllel. Legyen $G + \overline{G}$ a következő gráf. Egymás mellé tesszük G -t és G komplementerét, \overline{G} -t, és a két példányban egymásnak megfelelő pontokat összekötjük egy-egy éllel. Legyen G az n pontú út. Milyen n -re lesz

a. $2G$ perfekt?

b. $G + \overline{G}$ perfekt?

a. Legyenek G egyik példányának a csúcsai v_1, v_2, \dots, v_n , az út mentén vett sorrendben, a másik példányban a megfelelőcsúcsok u_1, u_2, \dots, u_n .

Legyen $2G$ -ben $A = \{v_i \mid i \text{ páros}\} \cup \{u_i \mid i \text{ páratlan}\}$ és $B = \{u_i \mid i \text{ páros}\} \cup \{v_i \mid i \text{ páratlan}\}$.

Könnyen látható, hogy minden él A és B között fut, tehát $2G$ páros gráf, ezért perfekt, minden n -re. 5 pont

b. Ha $n = 1$, akkor $2G$ két csúcs és egy él, ha $n = 2$, akkor $2G$ egy 3 hosszú (4 csúcsú) út, mindkettő perfekt. Legyen $n \geq 3$ és legyenek G egyik példányának a csúcsai v_1, v_2, \dots, v_n , az út mentén vett sorrendben, a másik példányban a megfelelő csúcsok u_1, u_2, \dots, u_n . Ekkor a v_1, v_2, v_3, u_3, u_1 csúcsok éppen egy 5 hosszú kört feszítenek! Tehát $n \geq 3$ esetén $G + \overline{G}$ nem perfekt. 5 pont

5. G fokszámsorozata $3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$, H és G absztrakt duálisok és mindketten összefüggők. H fokszámsorozata $x, y, 3, 3, 4, 4, 4, 4$. G egyszerű gráf. Határozzuk meg x -et és y -t.

Tudjuk, hogy G -nek és H -nak ugyanannyi éle van. Mivel minden gráfra $\sum d_i = 2e$, azt kapjuk, hogy $x + y + 22 = 28$, vagyis $x + y = 6$. 3 pont

A összefüggőség miatt H -nak nincs izolált pontja, tehát, $x, y \geq 1$. Mivel G egyszerű gráf, nincs benne hurokél és párhuzamos él, tehát x és y nem lehet 1 illetve 2, $x, y \geq 3$. 4 pont

De mivel $x + y = 6$, $x = y = 3$. 3 pont

6. A G , 2^{100} csúcsú gráf csúcsai megfelelnek az $H = \{1, 2, \dots, 100\}$ halmaz részhalmazainak. Tetszőleges $A, B \subseteq H$, $A \neq B$ részhalmazokra, a $v(A)$ és $v(B)$ csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve a G gráfban, ha vagy $A \not\subseteq B$ és $B \not\subseteq A$. Bizonyítsuk be, hogy G perfekt.

Legyenek az \mathcal{F} halmaz elemei a $H = \{1, 2, \dots, 100\}$ halmaz részhalmazai. Tetszőleges $A, B \subseteq H$ esettén legyen $A \preceq B$ akkor és csak akkor, ha $a \subseteq B$. 3 pont

Ez egy részbenrendezés: reflexív, aniszimmetrikus és tranzitív. 2 pont

Tehát az összehasonlítás gráfja perfekt. 2 pont

Csakhogy akkor az összehasonlítás gráfjának a komplementere is perfekt. Ez pedig éppen a feladatban szereplő G . 3 pont