

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

7. gyakorlat, 2019. november 8

Turán, halmazrendszerek, Erdős-Ko-Rado, Fisher

Tetszőleges H gráfra $ex(n, H)$ jelöli az n csúcsú, H -t részgráfként nem tartalmazó gráfok maximális élszámát, $Ex(n, H)$ pedig az n csúcsú, H -t részgráfként nem tartalmazó, $ex(n, H)$ élű gráfok halmazát (izomorfia erejéig).

Legyen $n, r \geq 1$. Az n csúcsú, r osztályú $T(n, r)$ **Turán gráfnak** n csúcsa van, r osztályba osztva a lehető legegyszerűsebben: ha $n = ar + b$, $r > b \geq 0$, akkor b osztályban $\lceil n/r \rceil$ csúcs van, $r - b$ osztályban pedig $\lfloor n/r \rfloor$ darab. Bármely két, különböző osztályhoz tartozó csúcs össze van kötve, az azonos osztályban levők nem.

Tetszőleges G gráfra legyen $|E(G)|$ G éleinek a száma.

Turán tétel (1941). $ex(n, K_{r+1}) = |E(T(n, r))|$. Ha pedig G egy n csúcsú gráf ami nem tartalmaz K_{r+1} -et részgráfként és $|E(G)| = |E(T(n, r))|$, akkor G izomorf a $T(n, r)$ Turán gráffal, azaz $Ex(n, K_{r+1}) = T(n, r)$.

Erdős, Stone, Simonovits tétel (1946...).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ex(n, H)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(H) - 1}.$$

Erdős, Kővári, Sós, Turán tétel (1954). Legyen $r \geq s \geq 2$. Egy n csúcsú gráfnak, amely nem tartalmaz $K_{r,s}$ -t részgráfként legfeljebb $c_{r,s} n^{2-1/s}$ éle van, valamilyen $c_{r,s}$ konstansra.

Erdős-Ko-Rado tétel (1961). Ha $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ k -uniform halmazrendszer ($k < n/2$) azzal a tulajdonsággal, hogy minden $A, B \in \mathcal{F}$ -re $A \cap B \neq \emptyset$, akkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ és ennyi is érhető.

Fisher egyenlőtlenség (1940). $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \subseteq 2^{[n]}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \neq j$ esetén $|A_i \cap A_j| = \lambda > 0$. Ekkor $m \leq n$.

Ray-Chaudhuri-Wilson (Frankl-Wilson) tétel (1975). Legyen $L = \{l_1, l_2, \dots, l_s\}$ és legyen $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \subseteq 2^{[n]}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \neq j$ esetén $|A_i \cap A_j| \in L$. Ekkor $m \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$.

1. Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú gráfnak, ha nincsen benne

- kör?
- páratlan kör? (páros lehet)
- páros kör? (páratlan lehet)
- 2 élből álló út?
- sem 3 élből álló út, sem kör?
- feszítőfa?

2. Egy 90 fős társaságból bizonyos párok leveleznek egymással. Akárhogyan választunk ki közülük tíz embert, ezek között mindig van legalább kettő, akik leveleznek egymással. Bizonyítsuk be, hogy a levelező párok száma legalább 405.

3. Igazoljuk, hogy az n -csúcsú, m -osztályú $T_{n,m}$ Turán-gráf pontosan akkor nem tartalmaz Hamilton-kört, ha $m = 2$ és n páratlan.

4. Legyenek v_1, v_2, \dots, v_n síkbeli vektorok, $|v_i| \geq 1$. Legalább hány párba lesz $|v_i + v_j| \geq 1$?

5. Legkevesebb hány csúcsa lehet egy háromszögmentes, egyszerű G gráfnak, ha $|E(G)| \geq 2|E(K_k)|$?

6. Adott a síkon n , nem feltétlenül különböző pont. Legfeljebb mennyi lehet az ezek közül kiválasztható egységnyi távolságra levő pontpárok száma?

7. Mutassuk meg, hogy sík n különböző pontja és n különböző egyenese között legfeljebb $c \cdot n^{\frac{3}{2}}$ illeszkedés lehet, ahol c alkalmas konstans. (Illeszkedés: egy (pont, egyenes) pár, ahol a pont illeszkedik az egyenesre.)

8. Mutassuk meg, hogy sík n különböző pontja legfeljebb $c \cdot n^{\frac{3}{2}}$ egység távolságot határozhat meg, ahol c alkalmas konstans.

9. Legfeljebb hány éle lehet egy n csúcsú gráfnak, ha élei kiszínezhetők úgy két színnel, hogy ne keletkezzen egyszínű háromszög.

10. Egy n tagú társaságban eredetileg senki nem ismer senkit. Minimálisan hány bemutatással (egy bemutatás mindig pontosan két ember egymásnak való bemutatását jelenti) érhetjük el, hogy teljesüljenek a következő feltételek: 1. Bármely három ember között van kettő, akik ismerik egymást (tehát be lettek mutatva); 2. Bárki bárkinek (olyannak is, akit nem ismer) küldhet üzenetet úgy, hogy az üzenetet egymást ismerő (tehát egymásnak bemutatott) emberek adják tovább egymásnak, s az végül célba jut.
11. Egy 49 csúcú gráfnak 1030 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor a kromatikus száma legalább 8, és hogy pontosan 8 is lehet.
12. Egy n tagú társaságból bármely k ember között van 2 aki kezet fogott. Legalább hány kézfogás történt?
13. Legyen $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, ahol minden $p_i > 1$ és p_i prímszám. Hány osztóját választhatjuk ki n -nek úgy, hogy semelyik két kiválasztott osztó se legyen relatív prím?
14. Artúr király n lovagját felderítő utakra küldi. Minden nap k lovag megy portyázni. Ugyanaz a csapat nem mehet kétszer és – hogy az információkat mindig mindenki megtudja – nem lehet két csapat, aminek nincs közös tagja. Hány napig lehet így csapatokat összeállítani?
15. Adott síkon m egyenes. Tegyük fel, hogy az egyenesek nem illeszkednek ugyanarra a pontra, és hogy az egyenesek közül semelyik kettő sem párhuzamos. Bizonyítsuk be, hogy ezen egyenesek legalább m metszéspontot határoznak meg!
16. Növényvédő szerekkel való kísérletezéshez a következőkre van szükség. Legyen m féle növény és n különböző földterület. Minden területen pont k féle növényt ültetünk, minden növényt pont r területre ültetünk, és minden növénypárra pont l olyan terület van, ahol mindenkettő szerepel, $r > l$. Lássuk be, hogy $n \geq m$.
17. Van néhány k elemű halmazunk, bármely kettő pontosan l pontban metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy valamelyik elemet legfeljebb csak k halmaz tartalmazza.
18. Egy 100 elemű halmaznak 20 és 80 elemű részhalmazait választjuk ki úgy, hogy bármely kettő metszi egymást. Legfeljebb hány részhalmazt lehet így kiválasztani?
19. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszernek 2^{n-1} tagja van és ezek közül semelyik kettő sem diszjunkt, akkor léteznek $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ olyan tagjai a rendszernek, amiknek pontosan egy közös elemük van.
20. Egy páros gráf két osztálya A és B . Bármely két A -beli pontnak pontosan 97 közös szomszédja van, és bármely két B -beli pontnak pontosan 111. a. Mutassunk ilyen gráfot. b. Bizonyítsuk be hogy nincs ilyen gráf, amelyre $|A| = |B| = 1000$.
21. Tegyük fel, hogy $k < n/2$ és $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ olyan metsző halmazrendszer, amire $|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{k-1}$. Mutassuk meg, hogy $[n]$ -nek van olyan i eleme, amit \mathcal{F} minden tagja tartalmaz. (Az Erdős-Ko-Rado tétel egyenlőség esete.)
22. Mutassunk olyan $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszert, hogy \mathcal{F} bármely két tagjának metszete legalább két elemet tartalmaz és $|\mathcal{F}| = 2^{n-2}$? Létezik-e ennél nagyobb halmazrendszer a fenti tulajdonsággal?
Hasznos igazság: $\binom{2k}{k} \leq 2^{2k-1}$. (Sőt, $\leq 2^{2k}/\sqrt{k}$ ha k elég nagy.)

Házi feladat

1. a. Egy G gráfnak n csúcsa van, és minden csúcs fokszáma legalább 100. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 100 hosszú (100 csúcú) utat!
b. Egy G gráfnak n csúcsa és e éle van, $e > 100n$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 100 hosszú (100 csúcú) utat!
2. Mutassunk minden n -re olyan n csúcú és $e > 40n - 5000$ élű gráfot, amelyben nincs 100 hosszú (100 csúcú) út!