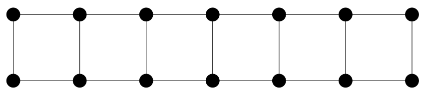
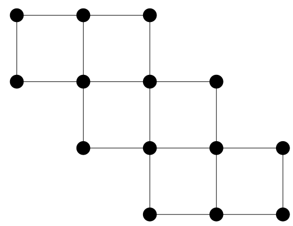
Kombinatorika és gráfelmélet 2.

4. gyakorlat, 2019. október 9.

Dualitás, ismétlés

1. Gyengén izomorfak-e az itt látható gráfok?





2. Bizonyítsuk be, két fa pontosan akkor gyengén izomorf, ha ugyanannyi pontjuk van.

3. Mutassuk meg, hogy tetszőleges egyszerű, síkgráf élhalmaza előáll, mint 2 páros gráf élhalmazának uniója.

4. A G és a G^* véges egyszerű gráfok egymás duálisai. Bizonyítsuk be, hogy $\min\{\delta(G), \delta(G^*)\} = 3$. δ a legkisebb fokszám.

5. Legyen G olyan $n \geq 3$ csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, melyben az élek száma $3n - 6$. Mennyi G duálisának maximális fokszáma?

6. Tegyük fel, hogy G síkbarajzolt gráf, G minden lapja háromszög és G^* minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van G-nek?

7. Legfeljebb mennyi a perfekt síkgráfok kromatikus száma?

8. Bizonyítsuk be, hogy minden (legalább három csúcsú) síkgráfnak van legalább három olyan csúcsa, amelyeknek a foka kevesebb mint hat.

9. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$, v_i és v_j között akkor és csak akkor van él, ha $i + j$ nem osztható 3-mal. Milyen n-re lesz G perfekt?

10. 10000 ember sorban áll a Kombi 2 vizsgán. Bizonyítsuk be, hogy vagy található 100 ember a sorban úgy, hogy e 100 ember között aki hátrább áll, az mindig *alacsonyabb* az előbbre állónál, vagy pedig található 100 ember a sorban úgy, hogy e 100 ember között aki hátrább áll, az mindig *magasabb* az előbbre állónál.

11. A G összefüggő, síkbarajzolt gráfnak 200 éle van, duálisa egyszerű, páros gráf. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legfeljebb 100 csúcsa van.

12. A G egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt gráfnak $n \geq 3$ csúcsa van, és nem tartalmaz 3, 4 és 5 hosszú kört. Bizonyítsuk be, hogy G duálisa, G^*, nem egyszerű gráf.

13. Tetszőleges összefüggőf síkbarajzolható G gráfhoz mutassunk olyan, önmagával duális G' síkbarajzolt gráfot, aminek G feszített részgráfja.

14. Adott 50 egyforma hosszú, különböző intervallum egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy (a) vagy van olyan pont amelyet legalább 8 intervallum tartalmaz, vagy pedig van 8 páronként diszjunkt intervallum. (b) Ugyanez, csak 7-tel és 9-cel.

15. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek F_1, F_2, …, F_t a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Határozzuk meg a

$$s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| - 1)$$

mennyiség maximumát ha G tetszőleges 10 csúcsú síkbarajzolt gráf lehet.

16. Egy összefüggő G síkbarajzolt gráfnak 200 csúcsa és 300 éle van. Tudjuk, hogy a duálisa egyszerű. Bizonyítsuk be, hogy G–ben a maximális fokszám 3.

17. (múlt heti hf) Legyen G egy páros, síkbarajzolt gráf. Képezzük a G' gráfot a következő módon. Vegyünk fel egy-egy csúcsot G minden tartományában, és kössük össze a különböző szomszédos tartományoknak megfelelő csúcsokat. Ezenkívül kössünk össze minden tartománynak megfelelő csúcsot G azon csúcsaival, amelyek a megfelelő tartomány határán vannak. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G') \leq 6$.

    Mutassunk olyan G páros, nem feltétlenül egyszerű, síkbarajzolt gráfot, amelyre a fenti módon képezett G' gráf kromatikus száma 5.

18. (múlt heti hf) Tetszőleges n csúcsú G síkbarajzolt gráfra legyenek $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a csúcsok fokszámai, $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek F_1, F_2, …, F_t a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Legyen

$$s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| + a) + \sum_{i=1}^{n} (d_i + a)\,.$$

    Határozzuk meg a értékét úgy, hogy $s(G)$ értéke ugyanannyi legyen minden, legalább 3 csúcsú, egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt G gráfra.

19. Bizonyítsuk be, hogy egy síkbarajzolható gráf tartományai akkor és csak akkor színezhetők ki két színnel, ha minden pont foka páros.