Kombinatorika és gráfelmélet 2.

3. gyakorlat, 2019. szeptember 27.

Összehasonlítás gráfok, Dilworth tétel, síkgráfok

1. Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egy számsorozat. Ebből képezzük a G gráfot a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsokon a következő módon: minden $i > j$ számpárra a v_i és v_j csúcsok össze vannak kötve G-ben akkor és csak akkor, ha $a_i > a_j$.

   Bizonyítsuk be, hogy G minden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorozat esetén perfekt!

2. (Erdős-Szekeres tétel) Legyen $A = a_1, a_2, \ldots, a_m$ egy csupa különböző számból álló számsorozat, $m = kl+1$, $k, l > 0$.

   a. Bizonyítsuk be, hogy A tartalmaz egy $l+1$ hosszú növekedő vagy egy $l+1$ hosszú csökkenő részsorozatot.

   b. Bizonyítsuk be, hogy az állítás $m = kl$ esetén már nem feltétlenül igaz.

3. Van egy csomó kartondobozunk, melyek a G gráf csúcsainak felelnek meg. Két csúcs akkor van összekötve, ha a megfelelő dobozok közül egyik sem rakható a másikba. Igazoljuk, hogy G perfekt.

4. Adott a síkon néhány körvonal, ezekhez rendeljük a következő G gráfot. G csúcsai feleljenek meg egy-egy megadott körvonalnak, és kettő akkor legyen összekötve, ha a két megfelelő körvonal egyike teljesen a másik belsejében halad. Bizonyítsuk be, hogy az így megadott G gráf perfekt.

5. Legyen a G gráf csúcshalmaza egy véges halmaz néhány tetszőleges részhalmaza. Két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő részhalmazok közül valamelyik tartalmazza a másikat. Bizonyítsuk be, hogy G perfekt.

6. Legyen $(H, \prec)$ egy részbenrendezett halmaz. Egy x elem *maximális* (*minimális*), ha nem létezik olyan $y \in H$, amelyre $x \prec y$ ($y \prec x$).

   a. Bizonyítsuk be, hogy H-ban a maximális (illetve a minimális) elemek halmaza egy antilánc.

   b. Tegyük fel, hogy a maximális és minimális elemek *együtt* egy antiláncot alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy H összes eleme is egy antiláncot alkot.

7. Legyen $(H, \prec)$ egy részbenrendezett halmaz, L egy maximális lánc, amelynek maximális eleme x, minimális eleme y. Legyen $A = \{z_1, \ldots, z_a\}$ egy maximális antilánc H-ban.

   Végül legyen
   $$H^+ = \{\ h \in H \mid \exists z \in A : z \preceq h\},$$
   és
   $$H^- = \{\ h \in H \mid \exists z \in A : h \preceq z\}.$$

   a. Bizonyítsuk be, hogy $H^+ \cap H^- = A$.

   b. Bizonyítsuk be, hogy $H^+ \cup H^- = H$.

   c. Bizonyítsuk be, hogy $x \in H^+$, $y \in H^-$.

8. Adott egy ABC háromszög, és benne n pont. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható $\sqrt[3]{n}$ pont úgy, hogy bármely kettő által meghatározott egyenes a háromszögnek ugyanazt a két oldalát metszi.

9. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V, E_1)$ és $G_2(V, E_2)$ perfektek, $|V| = 65$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy teljes ötöst vagy egy üres ötöst. (Öt pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy semelyik kettő sincs.)

10. Adott 50 egyforma hosszú, különböző intervallum egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy (a) vagy van olyan pont amelyet legalább 8 intervallum tartalmaz, vagy pedig van 8 páronként diszjunkt intervallum. (b) Ugyanez, csak 7-tel és 9-cel.

11. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek F_1, F_2, $\ldots$, F_t a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Határozzuk meg a

$$s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| - 1)$$

mennyiség maximumát ha G tetszőleges 10 csúcsú síkbarajzolt gráf lehet.

12. Egy összefüggő G síkbarajzolt gráfnak 200 csúcsa és 300 éle van. Tudjuk, hogy a duálisa egyszerű. Bizonyítsuk be, hogy G–ben a maximális fokszám 3.

13. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $e(G) - n(G) - 3t(G)$ mennyiség maximumát. (Ha G tetszőleges síkbarajzolt gráf lehet.)

14. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V, E_1)$ perfekt, $G_2(V, E_2)$ páros gráf, és $|V| = 163$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy teljes tizest, vagy egy üres tizest. (Tíz pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy semelyik kettő.)

Házi feladat

1. Legyen G egy páros, síkbarajzolt gráf. Képezzük a G' gráfot a következő módon. Vegyünk fel egy-egy csúcsot G minden tartományában, és kössük össze a különböző szomszédos tartományoknak megfelelő csúcsokat. Ezenkívül kössünk össze minden tartománynak megfelelő csúcsot G azon csúcsaival, amelyek a megfelelő tartomány határán vannak. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G') \leq 6$.

Mutassunk olyan G páros, nem feltétlenül egyszerű, síkbarajzolt gráfot, amelyre a fenti módon képezett G' gráf kromatikus száma 5.

2. Tetszőleges n csúcsú G síkbarajzolt gráfra legyenek $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a csúcsok fokszámai, $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek F_1, F_2, $\ldots$, F_t a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Legyen

$$s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| + a) + \sum_{i=1}^{n} (d_i + a)\,.$$

Határozzuk meg a értékét úgy, hogy $s(G)$ értéke ugyanannyi legyen minden, legalább 3 csúcsú, egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt G gráfra.