

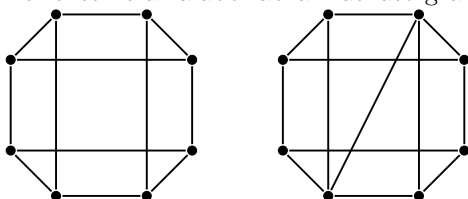
## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

2. gyakorlat, 2019. szeptember 20.

*Perfekt gráfok, összehasonlítás gráfok, Dilworth tétel*

1. A  $G$  gráf csúcsai legyenek a  $8 \times 8$ -as sakktábla mezői, és két mező akkor legyen szomszédos  $G$ -ben, ha lóugrásnyira vannak egymástól. (A huszár mindig egy  $3 \times 2$ -es téglalap egyik csúcsából az átellenes csúcsába lép.) Mutassuk meg, hogy  $G$  perfekt. Mi a helyzet más figurákkal?
2. Képezzük a  $G'$  gráfot a  $G$  perfekt gráfból úgy, hogy egy  $G$ -től diszjunkt  $v$  csúcsot összekötünk  $G$  egy klikkjének minden csúcsával. Mutassuk meg, hogy  $G'$  is perfekt gráf.
3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $G$  gráf pontosan akkor perfekt, ha  $G$  minden  $G'$  feszített részgráfjának van olyan független ponthalmaza, ami  $G'$  minden maximális méretű klikkjét metszi.
4. Írjuk le azokat a  $G$  gráfokat, amelyeknek minden  $H$  részgráfjára  $\omega(H) = \chi(H)$ .
5. Legyen  $G$  olyan  $n$  csúcsú véges egyszerű gráf, amelyik nem perfekt, de ha tetszőleges csúcsát elhagyjuk, az így kapott gráf már perfekt. Mutassuk meg, hogy  $n - 1$  nem lehet prímszám.

6. Perfektek-e az alábbi ábrán látható gráfok?



7. Legyen adott egy  $T$  fa és ennek  $F_1, \dots, F_n$  részfái. Megadunk egy  $G$  gráfot az  $\{F_1, \dots, F_n\}$  halmazon:  $F_i$  és  $F_j$  ( $i \neq j$ ) akkor legyen szomszédos, ha van közös csúcsuk. Bizonyítsd be, hogy  $G$  perfekt!
8. Legyen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  egy számsorozat. Ebből képezzük a  $G$  gráfot a  $v_1, v_2, \dots, v_n$  csúcsokon a következő módon: minden  $i > j$  számpárra a  $v_i$  és  $v_j$  csúcsok össze vannak kötve  $G$ -ben akkor és csak akkor, ha  $a_i > a_j$ .  
Bizonyítsuk be, hogy  $G$  minden  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sorozat esetén perfekt!
9. (Erdős-Szekeres tétel) Legyen  $A = a_1, a_2, \dots, a_m$  egy csupa különböző számból álló számsorozat,  $m = kl + 1$ ,  $k, l > 0$ .
  - a. Bizonyítsuk be, hogy  $A$  tartalmaz egy  $l + 1$  hosszú növekedő vagy egy  $l + 1$  hosszú csökkenő részsorozatot.
  - b. Bizonyítsuk be, hogy az állítás  $m = kl$  esetén már nem feltétlenül igaz.
10. Van egy csomó kartondobozunk, melyek a  $G$  gráf csúcsainak felelnek meg. Két csúcs akkor van összekötve, ha a megfelelő dobozok közül egyik sem rakható a másikba. Igazoljuk, hogy  $G$  perfekt.
11. Adott a síkon néhány körvonal, ezekhez rendeljük a következő  $G$  gráfot.  $G$  csúcsai feleljenek meg egy-egy megadott körvonalnak, és kettő akkor legyen összekötve, ha a két megfelelő körvonal egyike teljesen a másik belsejében halad. Bizonyítsuk be, hogy az így megadott  $G$  gráf perfekt.
12. Legyen a  $G$  gráf csúcshalmaza egy véges halmaz néhány tetszőleges részhalmaza. Két különböző csúcs akkor legyen szomszédos  $G$ -ben, ha a megfelelő részhalmazok közül valamelyik tartalmazza a másikat. Bizonyítsuk be, hogy  $G$  perfekt.
13. Legyen  $(H, \prec)$  egy részbenrendezett halmaz. Egy  $x$  elem *maximális* (*minimális*), ha nem létezik olyan  $y \in H$ , amelyre  $x \prec y$  ( $y \prec x$ ).
  - a. Bizonyítsuk be, hogy  $H$ -ban a maximális (illetve a minimális) elemek halmaza egy antilánc.
  - b. Tegyük fel, hogy a maximális és minimális elemek *együtt* egy antiláncot alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy  $H$  összes eleme is egy antiláncot alkot.

14. Legyen  $(H, <)$  egy részbenrendezett halmaz,  $L$  egy maximális lánc, amelynek maximális eleme  $x$ , minimális eleme  $y$ . Legyen  $A = \{z_1, \dots, z_a\}$  egy maximális antilánc  $H$ -ban.

Végül legyen

$$H^+ = \{ h \in H \mid \exists z \in A : z \preceq h \},$$

és

$$H^- = \{ h \in H \mid \exists z \in A : h \preceq z \}.$$

- Bizonyítsuk be, hogy  $H^+ \cap H^- = A$ .
- Bizonyítsuk be, hogy  $H^+ \cup H^- = H$ .
- Bizonyítsuk be, hogy  $x \in H^+$ ,  $y \in H^-$ .

#### Házi feladat

- Igaz, hogy egy részbenrendezett halmazban minden maximális lánc és maximális antilánc metszi egymást?
- A  $G$  gráf *splitgráf*, ha csúcshalmaza előáll egy klikk és egy független ponthalmaz uniójaként. Mutassuk meg, hogy minden splitgráf perfekt.