Kombinatorika és gráfelmélet 2.

1. gyakorlat, 2019. szeptember 13.

Perfekt gráfok

1. (Shift gráf) Legyen $m > 1$. Az S_m shift gráf csúcsai legyenek az (i, j) számpárok, ahol $1 \leq i < j \leq m$. (Elképzelhetjük (i, j)-t egy intervallumnak is.) Két csúcs, mondjuk (i, j) és (i', j') akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $i = j'$ vagy $j = i'$. Vagyis ha az egyik intervallum ott végződik, ahol a másik kezdődik.

   a. Bizonyítsuk be, hogy S_m nem tartalmaz háromszöget. b. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(S_m) \geq \log_2 m$.

2. (*)(Módosított shift gráf) Legyen $m > 1$. Az T_m módosított shift gráf csúcsai legyenek az (i, j, k) számhármasok, ahol $1 \leq i < j < k \leq m$. Két csúcs, mondjuk (i, j, k) és (i', j', k') akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $i = j'$ és $j = k'$, illetve ha $i' = j$ és $j' = k$. Vagyis ha az egyik hármas első két eleme ugyanaz, mint a másik hármas második két eleme.

   a. Bizonyítsuk be, hogy T_m nem tartalmaz háromszöget. b. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(T_m) \longrightarrow \infty$ ha $m \longrightarrow \infty$.

3. Bizonyítsuk be, hogy a páros gráfok komplementerei perfektek.

4. Bizonyítsuk be, hogy az intervallumgráfok komplementerei perfektek.

5. a. Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami nem intervallumgráf. b. Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami nem intervallumgráf komplementere.

6. A G gráfot *ívgráfnak* hívjuk, ha a csúcsai megfelelnek intervallumoknak (íveknek) egy körön, két csúcs össze van kötve, ha a megfelelő ívek metszik egymást.

   a. Mutassunk olyan ívgráfot, amely nem perfekt.

   b. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy ívgráf, akkor $\chi(G) \leq 2\omega(G)$.

7. Legyenek a G_n gráf csúcsai az $1, 2, 3, \ldots, n$ számok, és legyen ij él, ha i és j relatív prímek. Határozzuk meg a $\chi(G)$ és $\omega(G)$ paramétereket. Perfekt-e a G_n gráf? (Tegyük fel, hogy n elég nagy.)

8. Képezzük a G' gráfot a G perfekt gráfból úgy, hogy egy G-től diszjunkt v csúcsot összekötünk G egy klikkjének minden csúcsával. Mutassuk meg, hogy G' is perfekt gráf.

9. A G gráf csúcsai legyenek a 8×8-as sakktábla mezői, és két mező akkor legyen szomszédos G-ben, ha lóugrásnyira vannak egymástól. (A huszár mindig egy 3×2-es téglalap egyik csúcsából az átellenes csúcsába lép.) Mutassuk meg, hogy G perfekt. Mi a helyzet más figurákkal?

10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf pontosan akkor perfekt, ha G minden G' feszített részgráfjának van olyan független ponthalmaza, ami G' minden maximális méretű klikkjét metszi.

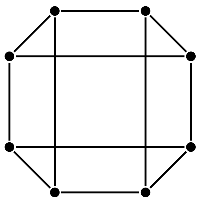
11. a) Van olyan gráf, ami intervallumgráf, de nem egy intervallumgráf komplementere?
    b) Van olyan gráf, ami egy intervallumgráf komplementere, de nem intervallumgráf?

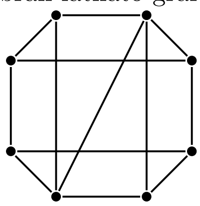
12. Írjuk le azokat a G gráfokat, amelyeknek minden H részgráfjára $\omega(H) = \chi(H)$.

13. Legyen G olyan n csúcsú véges egyszerű gráf, amelyik nem perfekt, de ha tetszőleges csúcsát elhagyjuk, az így kapott gráf már perfekt. Mutassuk meg, hogy $n - 1$ nem lehet prímszám.

14. A G gráf *splitgráf*, ha csúcshalmaza előáll egy klikk és egy független ponthalmaz uniójaként. Mutassuk meg, hogy minden splitgráf perfekt.

15. Perfektek-e az alábbi ábrán látható gráfok?





16. Legyen adott egy T fa és ennek $F_1, \ldots, F_n$ részfái. Megadunk egy G gráfot az $\{F_1, \ldots, F_n\}$ halmazon: F_i és F_j $(i \neq j)$ akkor legyen szomszédos, ha van közös csúcsuk. Bizonyítsd be, hogy G perfekt!

Házi feladat

Egy G gráf élgráfját $L(G)$-vel jelöljük.

1. Perfekt az $L(K_n)$ gráf?
2. Perfekt az $L(K_{n,n})$ gráf? És az $L(L(K_{n,n}))$ gráf?