

Kombinatorika és gráfelmélet II
2. ZH, 2018. november 28. 8.15-9.45, H 406.
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végig gondolása világosan kiderüljön a dolgozattól. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmeoldásokért pedig az útmutatóban szereplő pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. G egy síkgráf, amelynek legalább 4 csúcsa van. Van 7-féle színünk, $\{1, 2, \dots, 7\}$, ezekkel ki akarjuk színezni a csúcsokat. De valaki megelőzött minket, és kiszínezett 4 csúcsot, amelyek egy teljes 4-est feszítenek, az 1, 2, 3, illetve 4 színekkel. Bizonyítsuk be, hogy be tudjuk fejezni a színezést, vagyis ki tudjuk színezni a többi csúcsot az $\{1, 2, \dots, 7\}$ színekkel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek.

1. megoldás:

Legyen v_1, v_2, v_3, v_4 a négy kiszínezett csúcs, v_i színe i . Rajzoljuk le G -t a síkra. A v_1, v_2, v_3, v_4 között futó élek a síkot 4 tartományra bontják, legyenek ezek T_1, T_2, T_3, T_4 , úgy, hogy T_i határán v_1, v_2, v_3, v_4 közül a v_i -től különböző három csúcs van. 3 pont

A G gráf különböző T_i tartományokban levő csúcsai nincsenek összekötve, így a különböző tartományokban levő csúcsokat színezhajjuk egymástól függetlenül. 3 pont

Tekintsük a T_i tartományban levő csúcsokat. Ezek egy síkgráfot feszítenek G -ben, színezzük ki őket az $i, 5, 6, 7$ színekkel. A négyszíntétel szerint ez megtehető. Ezt elvegezve $i = 1, 2, 3, 4$ -re, G egy színezését kapjuk, amely kielégíti a feltételeket. 4 pont

2. megoldás:

Legyen v_1, v_2, v_3, v_4 a négy kiszínezett csúcs, v_i színe i . Egy pillanatra felejtsük el v_1, v_2, v_3, v_4 színét. Színezzük ki G -t az a, b, c, d színekkel. A négyszíntétel szerint ez menni fog. 4 pont

Mivel v_1, v_2, v_3, v_4 egy teljes 4-est feszítenek, különböző színűek, vagyis éppen az a, b, c, d színekkel vannak színezve. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy v_1 színe a , v_2 színe b , v_3 színe c , v_4 színe d . 3 pont

Színezzük át az a színű pontokat 1 színűre, a b színű pontokat 2 színűre, a c színű pontokat 3 színűre, a d színű pontokat 4 színűre. Ez a színezés kielégíti a feltételeket, ráadásul az 5, 6, 7 színeket nem is használtuk! 3 pont

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $k \geq 2$ -re

$$R(k, 3, 3, 3) \leq R(k, 17).$$

Legyen G egy $R(k, 17)$ csúcsú teljes gráf és színezzük ki az éleit az 1, 2, 3, 4 színekkel. Be kell látnunk, hogy van egy k csúcsú teljes részgráf, amelynek az összes éle 1-színű, vagy egy háromszög, amelynek minden éle 2, vagy minden éle 3, vagy minden éle 4-színű. 2 pont

Vegyünk egy új színezést, ahol az 1-színű élek 1-színűek maradnak, a többi élt meg kiszínezzük a 5-ös színnel. 3 pont

$R(k, 17)$ definíciója alapján vagy van egy k csúcsú teljes részgráf, amelynek az összes éle 1-színű, vagy egy 17 csúcsú teljes részgráf, amelynek az összes éle 5-színű. 2 pont

Az első esetben készen vagyunk. A második esetben tekintsük ezt a 17 csúcsú teljes H részgráfot. Eredetileg ennek az élei a 2, 3, 4 színekkel voltak kiszínezve. Mivel $R(3, 3, 3) \leq 17$ (volt órán, gyakorlaton, de könnyen be is lehet bizonyítani) ezért az eredeti színezésben található egy háromszög, amelynek minden éle 2, vagy minden éle 3, vagy minden éle 4-színű. 3 pont

3. G egy 20 csúcsú gráf, amelyhez akárhogyan veszünk hozzá 3 élt, a kapott gráfban nincs teljes 4 csúcsú gráf. Bizonyítsuk be, hogy G -nek nem lehet több, mint 100 éle.

Vegyük észre, hogy a G gráfban nincs háromszög. Ha lenne, ehhez hozzávéve egy negyedik csúcsból a három csúcsba mutató élt, éppen egy teljes 4 csúcsú gráfot kapnánk. 5 pont

Ekkor viszont a Mantel (vagy Turán) tétel szerint G -nek legfeljebb $10 \cdot 10 = 100$ éle lehet.

5 pont

(Egyébként az is igaz, hogy G -nek legfeljebb 13 éle van: G -ben minden csúcs foka legfeljebb 2, G -ben nincs háromszög, és G -ben nincs 3 hosszú (3 élű) út. Ebből következik, hogy akkor van a legtöbb éle, ha 6 db 2 hosszú (2 élű) útból és egy élből áll.)

4. Bizonyítsuk be, hogy minden $k \geq 2$ -re létezik egy $M(k)$ a következő tulajdonsággal. Akárhogy színezzük ki az $1, 2, \dots, M(k)$ számokat k színnel, léteznek olyan a, b, c egyforma színű számok, $(a, b, c \leq M(k))$ amelyekre $a + b = c$ és c páros.

A Schur tétel szerint minden $k \geq 2$ -re létezik egy $N(k)$ a következő tulajdonsággal. Akárhogy színezzük ki az $1, 2, \dots, N(k)$ számokat k színnel, léteznek olyan a, b, c egyforma színű számok, $(a, b, c \leq N(k))$ amelyekre $a + b = c$.

2 pont

Ezt fogjuk alkalmazni a páros számokra. Legyen $M(k) = 2N(k)$. Színezzük ki az $1, 2, \dots, M(k)$ számokat k színnel. Ebből képezzük az $1, 2, \dots, N(k)$ számok színezését, minden l számot, $1 \leq l \leq N(k)$ színezzük $2l$ színével az első színezés szerint.

3 pont

A Schur tétel szerint tehát léteznek a második színezésben olyan a', b', c' egyforma színű számok, $(a', b', c' \leq N(k))$ amelyekre $a' + b' = c'$.

2 pont

Az ezeknek megfelelő $a = 2a', b = 2b', c = 2c'$ számok egyszínűek az első színezésben, $a + b = c$ és c páros. (Mellesleg a és b is páros.)

3 pont

5. A G egyszerű páros gráf osztályai A és B , $|A| = 25$, $|B| = 20$. Bármely két A -beli csúcsnak pontosan két közös szomszédja van (B -ben).

a. Bizonyítsuk be, hogy van két A -beli csúcs, amelyeknek pontosan ugyanazok a szomszédjai (B -ben).

b. Bizonyítsuk be, hogy van három A -beli csúcs, amelyeknek pontosan ugyanazok a szomszédjai (B -ben).

a. Legyen $\mathcal{F} \subset 2^B$ a következő halmazrendszer. Minden $a \in A$ -ra vegyük be \mathcal{F} -be a szomszédait a G gráfban.

Ekkor a feltétel szerint bármely $A_i, A_j \in \mathcal{F}$ esetén $|A_i \cap A_j| = 2$.

1 pont

Ha a halmazok mind különbözőek lennének, akkor viszont a Fisher egyenlőtlenség alapján $|\mathcal{F}| \leq |B| = 20$, ami ellentmondás, mert tudjuk, hogy $|\mathcal{F}| = |A| = 25$.

2 pont

Tehát van olyan két halmaz, amelyek egyenlőek, mondjuk $A_1 = A_2$. Ekkor viszont a megfelelő két csúcsnak, a_1 -nek és a_2 -nek pontosan ugyanazok a szomszédjai B -ben.

2 pont

b. Tehát a_1 -nek és a_2 -nek pontosan ugyanazok a szomszédjai B -ben. De mivel bármely két A -beli csúcsnak pontosan két közös szomszédja van, a_1 -nek (és a_2 -nek is) pontosan két szomszédja van, mondjuk b_1 és b_2 . Ekkor viszont, a feltétel szerint, MINDEN A -beli csúcsnak szomszédja b_1 és b_2 . Hagyjuk el az a_1 csúcsot. Az (a) rész érvelése alapján (ami $|A| = 25$ helyett 24-re is működik) továbbra is van olyan két csúcs, amelyeknek pontosan ugyanaz a két szomszédja van. De akkor ez a két szomszéd nem lehet más, mint b_1 és b_2 . Tehát találtunk egy harmadik, a_3 csúcsot, amelynek csak b_1 és b_2 a szomszédja.

4 pont

(Igazából 7 olyan csúcs is van, amelyeknek csak b_1 és b_2 a szomszédja.)

6. Az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[100]}$ halmazrendszeréről tudjuk, hogy ha $A, B \in \mathcal{F}$ és $A \subset B$, akkor $|A| \leq 3$. Határozzuk meg $|\mathcal{F}|$ maximumát!

Legyen $\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathcal{F} \mid |A| \leq 3\}$ és $\mathcal{F}_2 = \{A \in \mathcal{F} \mid |A| > 3\}$.

2 pont

Világos, hogy $|\mathcal{F}_1| \leq 1 + 100 + \binom{100}{2} + \binom{100}{3}$.

2 pont

Ugyanakkor \mathcal{F}_2 Sperner rendszert alkot (nincs $A, B \in \mathcal{F}_2$, amelyre $A \subset B$) tehát a Sperner tétel alapján $|\mathcal{F}_2| \leq \binom{100}{50}$.

2 pont

Ezért $|\mathcal{F}| \leq 1 + 100 + \binom{100}{2} + \binom{100}{3} + \binom{100}{50}$.

2 pont

Ennyi viszont el is érhető: vegyük az összes 0, 1, 2, 3 és 50 elemű részhalmazt, ezek kielégítik a feltételeket.

2 pont