Kombinatorika és gráfelmélet II

1. ZH, 2018. október 8. 7.30-9.00, IB 134

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel llapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének vgiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóban szereplő pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. G egy 100 csúcsú, összefüggő, síkbarajzolt gráf. A duálisa, G^*, egyszerű páros gráf. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legalább 200 éle van.

A G gráf összefüggő, ezért nincs izolált pontja. 2 pont
Mivel G^* egyszerű gráf, nincs hurokéle. Ezért G-ben nem lehet 1-fokú csúcs. 2 pont
Szintén mivel G^* egyszerű gráf, nincs benne többszörös él sem. Ezért G-ben nem lehet 2-fokú csúcs. 2 pont
Ha G-ben lenne egy 3-fokú csúcs, ennek G^*-ban egy 3 hosszú kör felelne meg, ami nem lehetséges, mert G^* páros gráf. 2 pont
Tehát G-ben minden fokszám legalább 4, ezért $2e = \sum_{i=1}^{100} d_i \geq \sum_{i=1}^{100} 4 = 400$ vagyis $e \geq 200$. 2 pont

2. Legyen G egy síkgráf, csúcsainak, éleinek és összefüggő komponenseinek száma n, e és k, $n \geq 3$. Bizonyítsuk be, hogy $n - e - 2k \leq 0$.

1. megoldás: Rajzoljuk le G-t a síkra (metszés nélkül). Az Euler formula alapján $n-e+t = 1+k$, tehát $n-e-k = 1-t$. 4 pont
Felhasználva, hogy $k, t \geq 1$, $n - e - 2k < n - e - k = 1 - t \leq 0$. 6 pont

2. megoldás: Az egyenlőtlenség valójában *minden* gráfra igaz! Vegyünk G-ben egy feszítő erdőt, vagyis minden összefüggő komponensben egy feszítő fát. Legyen a kapott gráf G'. G'-nek minden komponensében eggyel kevesebb éle van, mint csúcsa, tehat G' éleinek a száma $e' = n - k$. Viszont G' G részgráfja, tehát $e \geq e'$. 6 pont
Ennek alapján $n - e - 2k \leq n - e' - 2k = n - (n - k) - 2k = -k < 0$. 4 pont

3. Adott n pont a síkon, mindegyik megfelel a G gráf egy-egy csúcsának. Két csúcs akkor és csak akkor van összekötve G-ben, ha a megfelelő két pont által meghatározott szakasz vízszintes és legalább 1 cm hosszú. Bizonyítsuk be, hogy G perfekt.

Definiálunk egy $\prec$ részbenrendezést az n ponton a következő módon. Legyen $p_i \prec p_j$ akkor és csak akkor, ha a p_ip_j szakasz vízszintes, legalább 1 cm hosszú, és jobb végpontja p_j. 4 pont
Könnyen látható, hogy $\prec$ valóban részbenrendezés, irreflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. 2 pont
Ugyanakkor a $\prec$ részbenrendezés összehasonlítás gráfja éppen G. Két pont akkor és csak akkor összehasonítható, ha az általuk meghatározott szakasz vízszintes és legalább 1 cm hosszú. 2 pont
Tudjuk, hogy az összehasonlítás gráfok perfektek, tehát igazoltuk, hogy G perfekt. 2 pont

4. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$, minden $1 \leq i \leq 99$-re v_i és v_{i+1} össze vannak kötve, ezenkívül v_{98} össze van kötve v_{100}-zal.

A H_k $(3 \leq k \leq 100)$ gráf csúcsai $u_1, u_2, \ldots, u_{100}$, minden $1 \leq i \leq 99$-re u_i és u_{i+1} össze vannak kötve, ezenkívül u_1 össze van kötve u_k-val.

Határozzuk meg, hogy milyen k-ra lesz H_k gyengén izomorf G-vel.

A G gráf egy háromszög és az egyik csúcsárol lelóg egy 98 hosszú út. 2 pont
A H_3 gráf pontosan ugyanilyen gráf, tehát H_3 izomorf G-vel, ezért gyengén izomorf is. 3 pont
Tegyük fel, hogy $k > 3$. Ekkor H_k tartalmaz egy k hosszú kört, G viszont csak egy 3 hosszú kört tartalmaz. Mivel $k > 3$, nem létezik G és H_k élei között körtartó bijekció, tehát H_k és G nem gyengén izomorfak. 4 pont
Vagyis H_k csak $k = 3$ esetén gyengén izomorf G-vel. 1 pont

5. A G_m $(m > 0)$ 2^m csúcsú gráf minden csúcsa megfelel az $\{1, 2, \ldots, m\}$ halmaz egy részhalmazának. A v_i és v_j csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha a megfelelő A_i és A_j halmazokra $A_i \subset A_j$ és $|A_j \setminus A_i|$ páratlan, vagy ha pont forditva, $A_j \subset A_i$ és $|A_i \setminus A_j|$ páratlan.

Milyen m-re lesz G_m perfekt?

Vegyük észre, hogy ha a v_i és v_j csúcsok szomszédosak, akkor a megfelelő A_i és A_j halmazok közül az egyik páros, a másik páratlan elemszámú. 4 pont

Ezért G_m egy páros gráf. Az egyik osztályba a páros, a másikba a páratlan méretű részhalmazoknak megfelelő csúcsok tartoznak. 3 pont

Viszont minden páros gráf perfekt, tehát G_m minden m-re perfekt. 3 pont

6. A G egyszerű gráf fokszámsorozata $3, 3, 3, 3, 5, 5$, a H egyszerű gráfé $4, 4, 4, 4, 5, 5$. Bizonyítsuk be, hogy G nem lehet H absztrakt duálisa.

1. megoldás: Mivel $\sum d_i = 2e$, ezért G-nek $(3{+}3{+}3{+}3{+}5{+}5)/2 = 11$ éle van, H-nak pedig $(4{+}4{+}4{+}4{+}5{+}5)/2 = 13$. 5 pont

Tehát nem gyengén izomorfak, mert nem létezik *semmilyen* bijekció sem az élek között. 5 pont

2. megoldás: H-nak 6 csúcsa van és $(4 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5)/2 = 13$ éle. 3 pont

Viszont egy n csúcsú síkgráfnak csak $3n - 6$ éle lehet, 6 csúcs esetén tehát legfeljebb 12. 3 pont

Ezért H nem síkgráf. De Whitney tétele alapján csak a síkgráfoknak van absztrakt duálisa, vagyis H-nak nincs. Ezért G nem lehet H absztrakt duálisa. 4 pont