

## 1. PÓT ZH, 2018. december 7. 12.15-13.45, H 405

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét, NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan és helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írószereken és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közben történő együttműködés.

1.  $G$  egy 100 csúcsú, egyszerű síkbarajzolt gráf, izomorf a duálisával,  $G^*$ -gal. Bizonyítsuk be, hogy  $G$  nem páros gráf.

2. A  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5$  egymástól különböző gráfok. Bizonyítsuk be, hogy vagy van közülük három olyan, hogy egyik sem részgráfja a másiknak, vagy három olyan, hogy bármely kettő közül valamelyik részgráfja a másiknak.

3. Adott  $n$  pont a síkon, mindegyik megfelel a  $G$  gráf egy-egy csúcsának. Két csúcs akkor és csak akkor van összekötve  $G$ -ben, ha a megfelelő két pont által meghatározott szakasz NEM vízszintes. Bizonyítsuk be, hogy  $G$  perfekt.

4. Legyen  $1 \leq i < j \leq 100$ , tetszőleges. A  $G_{i,j}$  gráf csúcsai  $v_1, v_2, \dots, v_{100}$ , minden  $1 \leq k \leq 99$ -re  $v_k$  és  $v_{k+1}$  össze vannak kötve, ezenkívül  $v_i$  össze van kötve  $v_j$ -vel. (Ha  $j = i + 1$ , akkor  $v_i$  és  $v_j$  mostmár két párhuzamos éllel lesz összekötve.)

Határozzuk meg, hogy milyen  $i < j$  párokra lesz  $G_{i,j}$  gyengén izomorf  $G_{2,99}$ -cel.

5. A  $G$   $2^{100}$  csúcsú gráf minden csúcsa megfelel az  $\{1, 2, \dots, 100\}$  halmaz egy részhalmazának. A  $v_i$  és  $v_j$  csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha a megfelelő  $A_i$  és  $A_j$  halmazokra  $A_i \subset A_j$  és  $|A_j \setminus A_i| \geq 80$  vagy ha pont fordítva,  $A_j \subset A_i$  és  $|A_i \setminus A_j| \geq 80$ .

Bizonyítsuk be, hogy  $G$  perfekt.

6. A  $G$  egyszerű gráf fokszámsorozata  $3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$ , a  $H$  egyszerű gráfé  $4, 4, 4, 4, 4, m$ . Milyen  $m$ -re lehet  $G$   $H$  absztrakt duálisa?

Kombinatorika és gráfelmélet II

## 2. PÓT ZH, 2018. december 7. 12.15-13.45, H 405

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A pusztán (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írászeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz sem használható, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata és a dolgozatírás közben történő együttműködés.

1.  $G$  egy síkgráf, amelynek legalább 2 csúcsa van. Van 5-féle színünk,  $\{1, 2, \dots, 5\}$ , ezekkel ki akarjuk színezni a csúcsokat. De valaki megelőzött minket, és kiszínezett két *nem szomszédos* csúcsot,  $u$ -t és  $v$ -t,  $u$ -t az 1-es színnel,  $v$ -t a 2-es színnel.

Bizonyítsuk be, hogy be tudjuk fejezni a színezést, vagyis ki tudjuk színezni a többi csúcsot az  $\{1, 2, \dots, 5\}$  színekkel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek.

2. Bizonyítsuk be, hogy

$$R(3, 3, 3, 3, 3) \geq R(3, 3, 3, 3) + 1.$$

3. Bizonyítsuk be, hogy 30 különböző pont között a síkon nem lehet több, mint 300 pár, amelyek egységtávolságot határoznak meg!

4. Bizonyítsuk be, hogy minden  $k \geq 2$ -re létezik egy  $N(k)$  a következő tulajdonsággal. Akárhogy színezzük ki az  $1, 2, \dots, N(k)$  számokat  $k$  színnel, léteznek olyan különböző  $a, b, c$  egyforma színű számok,  $(a, b, c \leq N(k))$  amelyekre  $a + b = 2c$ .

5. A  $G$  egyszerű páros gráf osztályai  $A$  és  $B$ ,  $|A|, |B| \geq 2$ . Bármely két  $A$ -beli csúcsnak pontosan két közös szomszédja van  $B$ -ben, és bármely két  $B$ -beli csúcsnak pontosan két közös szomszédja van  $A$ -ban.

Bizonyítsuk be, hogy  $|A| = |B|$ .

6. Az  $\mathcal{F} \subseteq 2^{[100]}$  halmazrendszeréről tudjuk, hogy ha  $A \in \mathcal{F}$  akkor  $|A| = 20$  vagy 21. Azt is tudjuk, hogy ha  $A, B \in \mathcal{F}$ , akkor  $A \cap B \neq \emptyset$ . Határozzuk meg  $|\mathcal{F}|$  maximumát ezen feltételek mellett!