

## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

6. gyakorlat, 2018. október 12.

### Listaszínezés

1. Egy gráfot *külsőgráfnak* nevezünk, ha lerajzolható a síkba az élek kereszteződése nélkül úgy, hogy minden csúcson rajta van az egyik (például a külső) tartomány határán. (a) Legfeljebb hány él lehet egy külsőgráfnak? (b) Adjunk a Kuratowski-tételhez hasonló karakterizációt a külsőgráfokra, azaz adjunk meg egy olyan (véges)  $\mathcal{F}$  gráfalmazt, hogy igaz legyen a következő: egy gráf pontosan akkor külsőgráf, ha nem tartalmaz  $\mathcal{F}$ -beli gráffal topologikusan izomorf részgráfot! (c) Legfeljebb mennyi a kromatikus száma egy külsőgráfnak?
2. Tetszőleges összefüggő síkbarajzolható  $G$  gráfhoz mutassunk olyan, önmagával duális  $G'$  síkbarajzolt gráfot, aminek  $G$  feszített részgráfja.
3. Határozzuk meg  $ch(K_{2,4})$  értékét. ( $K_{2,4}$  a két színosztályában 2 és 4 pontot tartalmazó teljes páros gráfot jelöli.)
4. Igaz-e, hogy ha  $\chi(G) = ch(G)$ , akkor  $\chi(\overline{G}) = ch(\overline{G})$ ?
5. Igaz-e, hogy ha a  $G$  gráf minden csúcsához adott egy legalább  $ch(G)$  méretű színlista, akkor  $G$  alkalmas csúcscsere esetén mohón kiszínezhető úgy, hogy minden csúcsnak a listáján szereplő legkisebb olyan színt választjuk, ami nem azonos az eddig megszínezett, az adott csúccsal szomszédos csúcsok valamelyikének színével?
6. Legyen  $K_{2,2,\dots,2}$  az a gráf, aminek komplementere  $n$  diszjunkt él. Határozzuk meg a  $ch(K_{2,2,\dots,2})$  listaszínezési számot.
7. Mutassunk olyan gráfot, ami egyetlen gráfnak sem élgráfja.
8. Mutassuk meg, hogy ha  $G$  élgráf, akkor  $ch(G) \leq 2\chi(G) - 1$ .
9. Igazoljuk, hogy ha a véges, egyszerű  $G$  gráf minden  $v$  csúcsára  $|L(v)| > d(v)$  teljesül, akkor  $G$   $L$ -listaszínezhető. ( $d(v)$  jelöli a  $v$  csúcs fokszámát.)
10. Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $T$  legalább két pontú fára  $ch(T) = 2$ .
11. Tetszőleges  $G$  gráfra legyen  $3G$  a következő gráf. Vesszük  $G$  három diszjunkt példányát, és az egymásnak megfelelő csúcsokat a különböző példányokban összekötjük.  
Bizonyítsuk be, hogy ha  $G$  síkgráf, akkor a  $3G$  gráf listaszínezési száma legfeljebb 7. (Vagyis  $ch(3G) \leq 7$ .)
12. Egy  $G$  gráfot sikerült lerajzolni úgy, hogy összesen egy él-metszés van. Bizonyítsuk be, hogy
  - a.  $ch(G) \leq 6$ ,
  - b.  $ch(G) \leq 5$ .

### Házi feladat

1. Bizonyítsuk be, hogy  $ch(K_{n,n^n}) = n + 1$  minden pozitív egész  $n$ -re. ( $K_{n,n^n}$  a két színosztályában  $n$  és  $n^n$  pontot tartalmazó teljes páros gráfot jelöli.)

2. Jelölje  $\chi''(G)$  a  $G$  gráf teljes kromatikus számát, azaz a minimális színszámot, ami szükséges érvényes teljes színezéshez úgy, hogy a csúcsokat és az éleket is színezzük, azzal a feltétellel, hogy érintkező elemek (összekötött csúcsok, közös csúccsal rendelkező élek, egy él és annak egy végpontja) nem lehetnek azonos színűek. Igazoljuk, hogy a listaszínezési sejtésből következne, hogy  $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 3$  minden  $G$  gráfra.