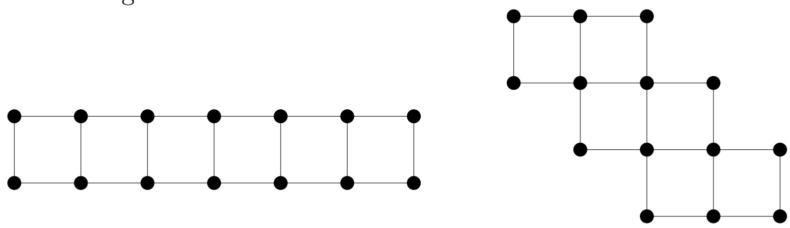
Kombinatorika és gráfelmélet 2.

5. gyakorlat, 2018. október 5.

Dualitás, ismétlés

1. Bizonyítsuk be, hogy egy síkbarajzolható gráf tartományai akkor és csak akkor színezhetők ki két színnel, ha minden pont foka páros.

2. Gyengén izomorfak-e az itt látható gráfok?



3. Bizonyítsuk be, két fa pontosan akkor gyengén izomorf, ha ugyanannyi pontjuk van.

4. (Múlt heti házi) Mutassuk meg, hogy tetszőleges egyszerű, síkgráf élhalmaza előáll, mint 2 páros gráf élhalmazának uniója.

5. A G és a G^* véges egyszerű gráfok egymás duálisai. Bizonyítsuk be, hogy $\min\{\delta(G), \delta(G^*)\} = 3$. δ a legkisebb fokszám.

6. Legyen G olyan $n \geq 3$ csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, melyben az élek száma $3n - 6$. Mennyi G duálisának maximális fokszáma?

7. Tegyük fel, hogy G síkbarajzolt gráf, G minden lapja háromszög és G^* minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van G-nek?

8. Egy gráfot *külsíkgráfnak* nevezünk, ha lerajzolható a síkba az élek kereszteződése nélkül úgy, hogy minden csúcs rajta van az egyik (például a külső) tartomány határán. (a) Legfeljebb hány éle lehet egy külsíkgráfnak? (b) Adjunk a Kuratowski-tételhez hasonló karakterizációt a külsíkgráfokra, azaz adjunk meg egy olyan (véges) $\mathcal{F}$ gráfhalmazt, hogy igaz legyen a következő: egy gráf pontosan akkor külsíkgráf, ha nem tartalmaz $\mathcal{F}$-beli gráffal topologikusan izomorf részgráfot! (c) Legfeljebb mennyi a kromatikus száma egy külsíkgráfnak?

9. Legfeljebb mennyi a perfekt síkgráfok kromatikus száma?

10. Bizonyítsuk be, hogy minden (legalább három csúcsú) síkgráfnak van legalább három olyan csúcsa, amelyeknek a foka kevesebb mint hat.

11. (Múlt heti házi) Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $e(G) - n(G) - 3t(G)$ mennyiség maximumát. (Ha G tetszőleges síkbarajzolt gráf lehet.)

12. Adott a síkon n pont, mindegyik megfelel egy G gráf egy-egy csúcsának. Két csúcs akkor és csak akkor van összekötve G-ben, ha a megfelelő pontok által meghatározott egyenes legfeljebb 1 fokos szöget zár be az x-tengellyel. Bizonyítsuk be, hogy G perfekt.

13. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$, v_i és v_j között akkor és csak akkor van él, ha $i + j$ nem osztható 3-mal. Milyen n-re lesz G perfekt?

14. 10000 ember sorban áll a Kombi 2 vizsgán. Bizonyítsuk be, hogy vagy található 100 ember a sorban úgy, hogy e 100 ember között aki hátrább áll, az mindig *alacsonyabb* az előbbre állónál, vagy pedig található 100 ember a sorban úgy, hogy e 100 ember között aki hátrább áll, az mindig *magasabb* az előbbre állónál.

15. A G összefüggő, síkbarajzolt gráfnak 200 éle van, duálisa egyszerű, páros gráf. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legfeljebb 100 csúcsa van.

16. A G egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt gráfnak $n \geq 3$ csúcsa van, és nem tartalmaz 3, 4 és 5 hosszú kört. Bizonyítsuk be, hogy G duálisa, G^*, nem egyszerű gráf.

17. Tetszőleges összefüggőf síkbarajzolható G gráfhoz mutassunk olyan, önmagával duális G' síkbarajzolt gráfot, aminek G feszített részgráfja.