

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

4. gyakorlat, 2018. szeptember 28.

Összehasonlítás gráfok, Dilworth tétel, dualitás

1. Adott egy ABC háromszög, és benne n pont. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható $\sqrt[3]{n}$ pont úgy, hogy bármely kettő által meghatározott egyenes a háromszögnek ugyanazt a két oldalát metszi.
2. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V, E_1)$ és $G_2(V, E_2)$ perfektek, $|V| = 65$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy teljes ötöst vagy egy üres ötöst. (Öt pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy semelyik kettő sincs.)
3. Adott 50 egyforma hosszú, különböző intervallum egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy (a) vagy van olyan pont amelyet legalább 8 intervallum tartalmaz, vagy pedig van 8 páronként diszjunkt intervallum. (b) Ugyanez, csak 7-tel és 9-cel.
4. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek F_1, F_2, \dots, F_t a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Határozzuk meg a

$$s(G) = \sum_{i=1}^t (|F_i| - 1)$$

mennyiség maximumát ha G tetszőleges 10 csúcú síkbarajzolt gráf lehet.

5. Egy összefüggő G síkbarajzolt gráfnak 200 csúcú és 300 éle van. Tudjuk, hogy a duálisa egyszerű. Bizonyítsuk be, hogy G -ben a maximális foksám 3.
6. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcúok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $e(G) - n(G) - 3t(G)$ mennyiség maximumát. (Ha G tetszőleges síkbarajzolt gráf lehet.)
7. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V, E_1)$ perfekt, $G_2(V, E_2)$ páros gráf, és $|V| = 163$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy teljes tizest, vagy egy üres tizest. (Tíz pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy semelyik kettő.)
8. (múlt heti hf) Legyen G egy páros, síkbarajzolt gráf. Képezzük a G' gráfot a következő módon. Vegyünk fel egy-egy csúcúot G minden tartományában, és kössük össze a különböző szomszédos tartományoknak megfelelő csúcúokat. Ezenkívül kössük össze minden tartománynak megfelelő csúcúot G azon csúcúival, amelyek a megfelelő tartomány határán vannak. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G') \leq 6$.
Mutassunk olyan G páros, nem feltétlenül egyszerű, síkbarajzolt gráfot, amelyre a fenti módon képezett G' gráf kromatikus száma 5.
9. (múlt heti hf) Tetszőleges n csúcúú G síkbarajzolt gráfra legyenek d_1, d_2, \dots, d_n a csúcúok foksámjai, $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek F_1, F_2, \dots, F_t a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Legyen

$$s(G) = \sum_{i=1}^t (|F_i| + a) + \sum_{i=1}^n (d_i + a).$$

Határozzuk meg a értékét úgy, hogy $s(G)$ értéke ugyanannyi legyen minden, legalább 3 csúcúú, egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt G gráfra.

10. Bizonyítsuk be, hogy egy síkbarajzolható gráf tartományai akkor és csak akkor színezhetők ki két színnel, ha minden pont foka páros.

11. A G és a G^* véges egyszerű gráfok egymás duálisai. Bizonyítsuk be, hogy $\min\{\delta(G), \delta(G^*)\} = 3$. δ a legkisebb fokszám.
12. Legyen G olyan $n \geq 3$ csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, melyben az élek száma $3n - 6$. Mennyi G duálisának maximális fokszáma?
13. Tegyük fel, hogy G síkbarajzolt gráf, G minden lapja háromszög és G^* minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van G -nek?
14. Egy gráfot *külsíkgráfnak* nevezünk, ha lerajzolható a síkba az élek kereszteződése nélkül úgy, hogy minden csúcs rajta van az egyik (például a külső) tartomány határán. (a) Legfeljebb hány éle lehet egy külsíkgráfnak? (b) Adjunk a Kuratowski-tételhez hasonló karakterizációt a külsíkgráfokra, azaz adjunk meg egy olyan (véges) \mathcal{F} gráfalmazt, hogy igaz legyen a következő: egy gráf pontosan akkor külsíkgráf, ha nem tartalmaz \mathcal{F} -beli gráffal topologikusan izomorf részgráfot! (c) Legfeljebb mennyi a kromatikus száma egy külsíkgráfnak?
15. Legfeljebb mennyi a perfekt síkgráfok kromatikus száma?
16. Bizonyítsuk be, hogy minden (legalább három csúcsú) síkgráfnak van legalább három olyan csúcsa, amelyeknek a foka kevesebb, mint hat.
17. Legyenek G csúcsai v_1, v_2, \dots, v_n , v_i és v_j között akkor és csak akkor van él, ha $i + j$ nem osztható 3-mal. Milyen n -re lesz G perfekt?
18. 10000 ember sorban áll a Kombi 2 vizsgán. Bizonyítsuk be, hogy vagy található 100 ember a sorban úgy, hogy e 100 ember között aki hátrább áll, az mindig *alacsonyabb* az előbbre állónál, vagy pedig található 100 ember a sorban úgy, hogy e 100 ember között aki hátrább áll, az mindig *magasabb* az előbbre állónál.
19. Tetszőleges összefüggő síkbarajzolható G gráfhoz mutassunk olyan, önmagával duális G' síkbarajzolt gráfot, aminek G feszített részgráfja.
20. Jelölje $F_n = K_{n,n} - nK_2$ azt a páros gráfot, melyet úgy kapunk a $K_{n,n}$ teljes páros gráfból, hogy elhagyjuk belőle egy teljes párosítás éleit. Milyen n -ek esetén lesz F_n síkbarajzolható?

Házi feladat.

1. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $e(G) - n(G) - 3t(G)$ mennyiség maximumát. (Ha G tetszőleges síkbarajzolt gráf lehet.)
2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges egyszerű, síkgráf élhalmaza előáll, mint 2 páros gráf élhalmazának uniója.