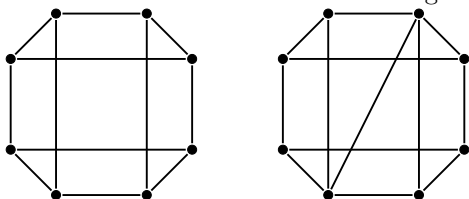


Kombinatorika és gráfelmélet 2.

2. gyakorlat, 2018. szeptember 14.

Perfekt gráfok, összehasonlítás gráfok, Dilworth tétel

1. Képezzük a G' gráfot a G perfekt gráfból úgy, hogy egy G -től diszjunkt v csúcsot összekötünk G egy klikkjének minden csúcsával. Mutassuk meg, hogy G' is perfekt gráf.
2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf pontosan akkor perfekt, ha G minden G' feszített részgráfjának van olyan független ponthalmaza, ami G' minden maximális méretű klikkjét metszi.
3. Írjuk le azokat a G gráfokat, amelyeknek minden H részgráfjára $\omega(H) = \chi(H)$.
4. Legyen G olyan n csúcsú véges egyszerű gráf, amelyik nem perfekt, de ha tetszőleges csúcsát elhagyjuk, az így kapott gráf már perfekt. Mutassuk meg, hogy $n - 1$ nem lehet prímszám.
5. Perfektek-e az alábbi ábrán látható gráfok?



6. Legyen adott egy T fa és ennek F_1, \dots, F_n részfái. Megadunk egy G gráfot az $\{F_1, \dots, F_n\}$ halmazon: F_i és F_j ($i \neq j$) akkor legyen szomszédos, ha van közös csúcsuk. Bizonyítsd be, hogy G perfekt!
7. Legyen a_1, a_2, \dots, a_n egy számsorozat. Ebből képezzük a G gráfot a v_1, v_2, \dots, v_n csúcsokon a következő módon: minden $i > j$ számpárra a v_i és v_j csúcsok össze vannak kötve G -ben akkor és csak akkor, ha $a_i > a_j$.
Bizonyítsuk be, hogy G minden a_1, a_2, \dots, a_n sorozat esetén perfekt!
8. (Erdős-Szekeres tétel) Legyen $A = a_1, a_2, \dots, a_m$ egy csupa különböző számból álló számsorozat, $m = kl + 1$, $k, l > 0$.
 - a. Bizonyítsuk be, hogy A tartalmaz egy $l + 1$ hosszú növekedő vagy egy $l + 1$ hosszú csökkenő részsorozatot.
 - b. Bizonyítsuk be, hogy az állítás $m = kl$ esetén már nem feltétlenül igaz.
9. Van egy csomó kartondobozunk, melyek a G gráf csúcsainak felelnek meg. Két csúcs akkor van összekötve, ha a megfelelő dobozok közül egyik sem rakható a másikba. Igazoljuk, hogy G perfekt.
10. Adott a síkon néhány körvonal, ezekhez rendeljük a következő G gráfot. G csúcsai feleljenek meg egy-egy megadott körvonalnak, és kettő akkor legyen összekötve, ha a két megfelelő körvonal egyike teljesen a másik belsejében halad. Bizonyítsuk be, hogy az így megadott G gráf perfekt.
11. Legyen a G gráf csúcshalmaza egy véges halmaz néhány tetszőleges részhalmaza. Két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G -ben, ha a megfelelő részhalmazok közül valamelyik tartalmazza a másikat. Bizonyítsuk be, hogy G perfekt.
12. Legyen $(H, <)$ egy részbenrendezett halmaz. Egy x elem *maximális* (*minimális*), ha nem létezik olyan $y \in H$, amelyre $x < y$ ($y < x$).
 - a. Bizonyítsuk be, hogy H -ban a maximális (illetve a minimális) elemek halmaza egy antilánc.
 - b. Tegyük fel, hogy a maximális és minimális elemek *együtt* egy antiláncot alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy H összes eleme is egy antiláncot alkot.

13. Legyen $(H, <)$ egy részbenrendezett halmaz, L egy maximális lánc, amelynek maximális eleme x , minimális eleme y . Legyen $A = \{z_1, \dots, z_a\}$ egy maximális antilánc H -ban.

Végül legyen

$$H^+ = \{ h \in H \mid \exists z \in A : z \preceq h \},$$

és

$$H^- = \{ h \in H \mid \exists z \in A : h \preceq z \}.$$

- Bizonyítsuk be, hogy $H^+ \cap H^- = A$.
- Bizonyítsuk be, hogy $H^+ \cup H^- = H$.
- Bizonyítsuk be, hogy $x \in H^+$, $y \in H^-$.

Házi feladat

- Igaz, hogy egy részbenrendezett halmazban minden maximális lánc és maximális antilánc metszi egymást?
- A G gráf *splitgráf*, ha csúcshalmaza előáll egy klikk és egy független ponthalmaz uniójaként. Mutassuk meg, hogy minden splitgráf perfekt.