

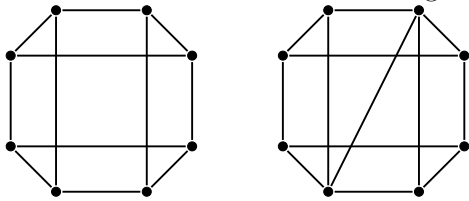
## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

1. gyakorlat, 2018. szeptember 7.

### Perfekt gráfok

- (Shift gráf) Legyen  $m > 1$ . Az  $S_m$  shift gráf csúcsai legyenek az  $(i, j)$  számpárok, ahol  $1 \leq i < j \leq m$ . (Elképzelhetjük  $(i, j)$ -t egy intervallumnak is.) Két csúc, mondjuk  $(i, j)$  és  $(i', j')$  akkor és csak akkor vannak összekötve, ha  $i = j'$  vagy  $j = i'$ . Vagyis ha az egyik intervallum ott végződik, ahol a másik kezdődik.
  - Bizonyítsuk be, hogy  $S_m$  nem tartalmaz háromszöget.
  - Bizonyítsuk be, hogy  $\chi(S_m) \geq \log_2 m$ .
- (\*) (Módosított shift gráf) Legyen  $m > 1$ . Az  $T_m$  módosított shift gráf csúcsai legyenek az  $(i, j, k)$  számhármások, ahol  $1 \leq i < j < k \leq m$ . Két csúc, mondjuk  $(i, j, k)$  és  $(i', j', k')$  akkor és csak akkor vannak összekötve, ha  $i = j'$  és  $j = k'$ , illetve ha  $i' = j$  és  $j' = k$ . Vagyis ha az egyik hármass első két eleme ugyanaz, mint a másik hármass második két eleme.
  - Bizonyítsuk be, hogy  $T_m$  nem tartalmaz háromszöget.
  - Bizonyítsuk be, hogy  $\chi(T_m) \rightarrow \infty$  ha  $m \rightarrow \infty$ .
- Bizonyítsuk be, hogy a páros gráfok komplementerei perfektek.
- Bizonyítsuk be, hogy az intervallumgráfok komplementerei perfektek.
- Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami nem intervallumgráf.
  - Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami nem intervallumgráf komplementere.
- A  $G$  gráfot *ívgráfnak* hívjuk, ha a csúcsai megfelelnek intervallumoknak (íveknek) egy körön, két csúc össze van kötve, ha a megfelelő ívek metszik egymást.
  - Mutassunk olyan ívgráfot, amely nem perfekt.
  - Bizonyítsuk be, hogy ha  $G$  egy ívgráf, akkor  $\chi(G) \leq 2\omega(G)$ .
- Legyenek a  $G_n$  gráf csúcsai az  $1, 2, 3, \dots, n$  számok, és legyen  $ij$  él, ha  $i$  és  $j$  relatív prímek. Határozzuk meg a  $\chi(G)$  és  $\omega(G)$  paramétereket. Perfekt-e a  $G_n$  gráf? (Tegyük fel, hogy  $n$  elég nagy.)
- Képezzük a  $G'$  gráfot a  $G$  perfekt gráfból úgy, hogy egy  $G$ -től diszjunkt  $v$  csúcsot összekötünk  $G$  egy klikkjének minden csúcsával. Mutassuk meg, hogy  $G'$  is perfekt gráf.
- A  $G$  gráf csúcsai legyenek a  $8 \times 8$ -as sakktábla mezői, és két mező akkor legyen szomszédos  $G$ -ben, ha lóugrásnyira vannak egymástól. (A huszár mindig egy  $3 \times 2$ -es téglalap egyik csúcsából az átellenes csúcsába lép.) Mutassuk meg, hogy  $G$  perfekt. Mi a helyzet más figurákkal?
- Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $G$  gráf pontosan akkor perfekt, ha  $G$  minden  $G'$  feszített részgráfjának van olyan független ponthalmaza, ami  $G'$  minden maximális méretű klikkjét metszi.
- Van olyan gráf, ami intervallumgráf, de nem egy intervallumgráf komplementere?
  - Van olyan gráf, ami egy intervallumgráf komplementere, de nem intervallumgráf?
- Írjuk le azokat a  $G$  gráfokat, amelyeknek minden  $H$  részgráfjára  $\omega(H) = \chi(H)$ .
- Legyen  $G$  olyan  $n$  csúcsú véges egyszerű gráf, amelyik nem perfekt, de ha tetszőleges csúcsát elhagyjuk, az így kapott gráf már perfekt. Mutassuk meg, hogy  $n - 1$  nem lehet prímszám.
- A  $G$  gráf *splitgráf*, ha csúcshalmaza előáll egy klikk és egy független ponthalmaz uniójaként. Mutassuk meg, hogy minden splitgráf perfekt.

15. Perfektek-e az alábbi ábrán látható gráfok?



16. Legyen adott egy  $T$  fa és ennek  $F_1, \dots, F_n$  részfái. Megadunk egy  $G$  gráfot az  $\{F_1, \dots, F_n\}$  halmazon:  $F_i$  és  $F_j$  ( $i \neq j$ ) akkor legyen szomszédos, ha van közös csúcsuk. Bizonyítsd be, hogy  $G$  perfekt!

**Házi feladat**

Egy  $G$  gráf élgráfját  $L(G)$ -vel jelöljük.

1. Perfekt az  $L(K_n)$  gráf?
2. Perfekt az  $L(L(K_{n,n}))$  gráf?