

Kombinatorika és gráfelmélet II
2. PótzH, 2017. december 1. 12.15-13.45, T 603.

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írászeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz sem használható, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata és a dolgozatírás közben történő együttműködés.

1. A G síkgráf minden csúcsához tartozik egy 5 hosszú színlista, kivéve egy csúcsot, amelyhez 1 hosszú lista tartozik. Bizonyítsuk be, hogy G kiszínezhető az adott listákról.

2. Bizonyítsuk be, hogy

$$R(4, 4, 4, 4, 4) \leq R(R(4, 4, 4), R(4, 4, 4)).$$

($R(\underbrace{m, m, \dots, m}_k)$ az a legkisebb R szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes gráf éleit akárhogy színezzük k színnel, lesz egy egyszínű teljes m csúcsú részgráf.)

3. Legyen G egy 10 csúcsú és 26 élű egyszerű gráf. Legyen H a következő gráf: csúcsai a, b, c, d , élei ab, ac, bc, ad . (Vagyis H egy háromszög, egy lelógó éllel.) Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz H -val izomorf (nem feltétlenül feszített) részgráfot.

4. Bizonyítsuk be, hogy minden $k \geq 2$ -re létezik egy $M(k)$ a következő tulajdonsággal. Akárhogy színezzük ki az $1, 2, \dots, M(k)$ számokat k színnel, léteznek olyan a, b, c egyforma színű, de különböző számok, ($a, b, c \leq M(k)$) amelyekre $a + b = c + 1$.

5. A G egyszerű páros gráf osztályai A és B . Bármely két A -beli csúcsnak legfeljebb egy közös szomszédja van (B -ben).

Bizonyítsuk be, hogy bármely két B -beli csúcsnak is legfeljebb egy közös szomszédja van (A -ban).

6. Az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszeréről tudjuk, hogy minden $A \in \mathcal{F}$ -hoz legfeljebb két $B \in \mathcal{F}$ létezik amelyre $A \subset B$. Bizonyítsuk be, hogy

$$|\mathcal{F}| \leq 3 \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$