

Kombinatorika és gráfelmélet II
2. ZH, 2017. november 20. 8.15-9.45, IB 134.
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végig gondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmeoldásokért pedig az útmutatóban szereplő pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. A G gráfból bárhogy elhagyunk 4 élt, a kapott gráf síkgráf. Bizonyítsuk be, hogy G listaszínezési száma, $ch(G) \leq 6$.

Tegyük fel, hogy G -ben minden pont foka legfeljebb 3. Ekkor könnyen látható, hogy $ch(G) \leq 4$, tetszőleges 4 hosszú színlistákról sorban ki tudjuk színezni a csúcsokat. 2 pont

Tehát feltehetjük, hogy van olyan v csúcs, amelynek a foka, $d(v) \geq 4$. Hagyjunk el 4 v -re illeszkedő élt, legyen G' a kapott gráf, amely a feltétel szerint síkgráf. Most hagyjuk el v -t G' -ből, az így kapott G'' gráf is síkgráf. 3 pont

Tekintsünk tetszőleges 6 hosszú színlistákat G csúcsain. Meg kell mutatnunk, hogy ezekről a listákról kiszínezhető G . Színezzük ki először v -t egy tetszőleges c színnel a listájáról. 1 pont

Most húzzuk ki a c színt minden további csúcs listájáról. Tehát a G'' gráfot kell kiszínezniünk és minden csúcsnak 5 vagy 6 hosszú a színlistája. Mivel G'' síkgráf, Thomassen tétele szerint ez megtehető. 3 pont

Ez pedig, a c színű v -t visszatéve, G megfelelő színezését adja a 6 hosszú listákról. 1 pont

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $k \geq 2$ -re

$$R(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_k) \leq 3k!$$

($R(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_k)$ az a legkisebb R szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes gráf éleit akárhogy színezzük k színnel, lesz egy egyszínű háromszög.)

Az állítást k -ra vonatkozó indukcióval látjuk be. Ha $k = 1$, akkor az állítás igaz (és semmitmondó), mivel $R(3) = 3$. 1 pont

Legyen most $k > 1$, és tegyük fel, hogy $k - 1$ -re már beláttuk az állítást. Tekintsünk egy $3k!$ csúcsú teljes gráfot és színezzük ki az éleit k színnel. Legyen v egy tetszőleges csúcs. A v -re illeszkedő $3k! - 1$ él közül $3(k - 1)!$ egyforma színű, mondjuk 1-es színű, legyen V ezen élek másik végpontjainak a halmaza. 3 pont

Ha V pontjai között van 1-es színű él, akkor már kész is vagyunk, v -vel együtt megvan az 1 színű háromszög. 3 pont

Ha nem, akkor viszont a V pontjai közötti élek $k - 1$ színnel vannak színezve, és mivel $|V| = 3(k - 1)!$, az indukciós feltevés szerint van köztük egyszínű háromszög. Ezzel beláttuk az állítást. 3 pont

3. Legyen H egy 4 csúcsú és 5 élű egyszerű gráf. A 100 csúcsú G gráfnak 3333 éle van. Bizonyítsuk be, hogy tartalmaz H -val izomorf (nem feltétlenül feszített) részgráfot.

A H gráf egy teljes 4 csúcsú gráf, minusz egy él. Ha G tartalmaz egy teljes 4 csúcsú gráfot, akkor természetesen készen vagyunk, mert H -val izomorf részgráfot is tartalmaz. 1 pont

Tehát tegyük fel, hogy G nem tartalmaz teljes 4 csúcsú gráfot. Ekkor a Turán tétel alapján legfeljebb annyi éle van, mint a 3 osztályú Turán gráfnak. 3 pont

A 3 osztályú Turán gráfnak viszont éppen 3333 éle van, vagyis G egy maximális élszámú K_4 -mentes gráf. Ekkor viszont, ugyancsak a Turán tétel alapján, G maga is éppen a 3 osztályú Turán gráf. 3 pont

Ebben viszont könnyedén találhatunk H -val izomorf részgráfot. Vegyünk két csúcsot az egyik osztályból, és még kettőt a másik két osztályból. 3 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy minden $k \geq 2$ -re létezik egy $M(k)$ a következő tulajdonsággal. Akárhogy színezzük ki az $1, 2, \dots, M(k)$ számokat k színnel, léteznek olyan a, b, c egyforma színű, de különböző számok, ($a, b, c \leq M(k)$) amelyekre $a + b = c$ és $a, b, c \geq 1000$.

A Schur tétel szerint minden k -ra létezik olyan $N(k)$, hogy akárhogy színezzük ki az $1, 2, \dots, N(k)$ számokat k színnel, lesznek x, y, z egyforma színű, de különböző számok, ($1 \leq x, y, z \leq N(k)$) amelyekre $x + y = z$. 1 pont

Legyen $M(k) = 1000N(k)$ és színezzük ki az $1, 2, \dots, M(k)$ számokat k színnel. Legyen i színe ($1 \leq i \leq M(k)$) $C(i)$. Ennek alapján készítsük el az $1, 2, \dots, N(k)$ számok C' színezését a következő módon. Minden j -re ($1 \leq j \leq N(k)$) legyen $C'(j) = C(1000j)$. 4 pont

A Schur tétel szerint tehát lesznek x, y, z egyforma színű, ($C'(x) = C'(y) = C'(z)$) de különböző számok, ($1 \leq x, y, z \leq N(k)$) amelyekre $x + y = z$. 2 pont

Ekkor viszont az eredeti C színezésben $a = 1000x, b = 1000y, c = 1000z$ kielégíti a feltételeket. Egyrészt $C(a) = C'(x), C(b) = C'(y), C(c) = C'(z)$, tehát a, b, c egyforma színűek. Másrészt $a + b = 1000(x + y) = 1000z = c$. Végül pedig nyilván $a, b, c \geq 1000$ és $a, b, c \leq M(k)$. 3 pont

5. A G egyszerű páros gráf osztályai A és B . A következő két dolgot tudjuk:

(1) minden $a \in A$ csúcs foka legalább 3,

(2) bármely két A -beli csúcsnak pontosan két közös szomszédja van (B -ben).

a. Bizonyítsuk be, hogy $|A| \leq |B|$.

b. Mutassuk meg, hogy csak a (2) feltételből nem következik, hogy $|A| \leq |B|$.

a. Legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Konstruáljunk egy hipergráfot a B pontjain a következő módon. Minden i -re legyen A_i a_i szomszédainak a halmaza. 1 pont

Azt állítjuk, hogy semelyik két halmaz sem egyenlő, vagyis $i \neq j$ -re $A_i \neq A_j$. Tegyük fel, hogy $A_i = A_j$. A (2) feltétel alapján $|A_i \cap A_j| = 2$. Az (1) feltétel alapján $|A_i| \geq 3$, tehát itt $|A_i \cap A_j| = |A_i| \geq 3$, ami ellentmondás. 3 pont

Vagyis semelyik két halmaz sem egyenlő. Ekkor viszont a alkalmazhatjuk a Fisher egyenlőtlenséget, mivel minden $i \neq j$ -re $|A_i \cap A_j| = 2$. Ennek alapján pedig $m \leq n$, vagyis $|A| \leq |B|$. 3 pont

b. Legyen A egy tetszőlegesen nagy halmaz, B pedig két pontú és húzzuk be az összes élt A és B közé. Vagyis G a $K_{n,2}$ teljes páros gráf. Ekkor (2) teljesül, de $|A| > |B|$. 3 pont

6. Az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszeréről tudjuk, hogy minden $A \in \mathcal{F}$ -hoz legfeljebb egy $B \in \mathcal{F}$ létezik amelyre $B \subset A$. Bizonyítsuk be, hogy

$$|\mathcal{F}| \leq 2 \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Legyen \mathcal{F}_1 azon \mathcal{F} -beli halmazok családja, amelyek *tartalmaznak* egy másik \mathcal{F} -beli halmazt, és legyen \mathcal{F}_2 azon \mathcal{F} -beli halmazok családja, amelyek *nem tartalmaznak* egy másik \mathcal{F} -beli halmazt. Világos, hogy \mathcal{F}_1 és \mathcal{F}_2 diszjunktak és az uniójuk éppen \mathcal{F} . 4 pont

Azt állítjuk, hogy \mathcal{F}_1 és \mathcal{F}_2 is Sperner rendszert alkot. Az \mathcal{F}_2 családra ez nyilvánvaló, hiszen ezek a halmazok semmilyen más halmazt nem tartalmaznak. 1 pont

Legyen $A, B \in \mathcal{F}_1$ és tegyük fel, hogy $B \subset A$. Ekkor \mathcal{F}_1 definíciója miatt van olyan $C \in \mathcal{F}_1$ amelyre $C \subset B$. Ekkor viszont $C \subset B \subset A$, tehát A legalább két halmazt tartalmaz, ami ellentmond a feltételeknek. 3 pont

Mivel \mathcal{F}_1 és \mathcal{F}_2 is Sperner rendszert alkot, a Sperner tétel alapján $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| \leq 2 \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. 2 pont