Kombinatorika és gráfelmélet II

1. ZH, 2017. október 9. 8.15-9.45, IB 134.

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel llapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének vgiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóban szereplő pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. A 100 élű G síkbarajzolt gráf izomorf a duálisával, hány csúcsa van?

Legyen G^* G duálisa, $n(G)$ ($n(G^*)$) G illetve G^* csúcsainak a száma, $t(G)$ ($t(G^*)$) a tartományoké. Ekkor $t(G) = n(G^*)$. 3 pont

De mivel G és G^* izomorfak, $n(G) = n(G^*)$, tehát $n(G) = t(G)$. 3 pont

Mivel minden gráf duálisa összefüggő, G^* is összefüggő, tehát G is. 2 pont

Írjuk fel az Euler formulát: $n(G) - e(G) + t(G) = 2$, vagyis $n(G) - 100 + n(G) = 2$, tehát $n(G) = 51$. 2 pont

2. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $e(G) - 2t(G)$ mennyiség maximális értékét, ha G tetszőleges $n = 100$ csúcsú, egyszerű síkbarajzolt gráf lehet.

1. megoldás: Vegyünk hozzá G-hez egy élt, legyen a kapott gráf G'. Nézzük meg, hogy változik az $e - 2t$ mennyiség. Természetesen $e(G') = e(G) + 1$. 1 pont

Ha az új él G két különböző komponensét köti össze, akkor $t(G') = t(G)$. Ekkor $e(G') - 2t(G') = e(G) - 2t(G) + 1$. Tehát egy ilyen élt érdemes behúznunk. Vagyis az a gráf, amelyre $e(G) - 2t(G)$ maximális, összefüggő. 4 pont

Ha az új él két vége G-nek ugyanabban a komponensében van, akkor $t(G') = t(G) + 1$. Ekkor $e(G') - 2t(G') = e(G) - 2t(G) - 1$. Tehát egy ilyen élt nem szabad behúznunk, illetve ha van ilyen él, azt érdemes elvenni. Vagyis abban a gráfban, amelyre $e(G) - 2t(G)$ maximális, nincs kör. 4 pont

Tehát a keresett gráf egy fa. Ekkor $e(G) = 99$, $t(G) = 1$, $e(G) - 2t(G) = 97$, ez a maximális érték. 1 pont

2. megoldás: Legyen $k(G)$ G komponenseinek a száma. Az Euler formula alapján $n(G) - e(G) + t(G) = 1 + k(G)$. Ebből $e(G) - t(G) = n(G) - 1 - k(G) = 99 - k(G)$. Vagyis $e(G) - 2t(G) = 99 - t(G) - k(G)$. 4 pont

Minden G-re $t(G) \geq 1$ és $k(G) \geq 1$, tehát $e(G) - 2t(G) = 99 - t(G) - k(G) \leq 97$. 4 pont

97 viszont el is érhető, ha G egy fa, ekkor $e(G) - 2t(G) = 99 - t(G) - k(G) = 97$. Tehát ennyi a maximum. 2 pont

3. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_n$. A v_i és v_j ($i \neq j$) csúcsok pontosan akkor vannak összekötve, ha $i + j$ osztható 4-gyel. Milyen n-re lesz G perfekt?

Legyen $V_0 = \{\ v_i \mid i \equiv 0 \bmod 4\ \}$, $V_1 = \{\ v_i \mid i \equiv 1 \bmod 4\ \}$, $V_2 = \{\ v_i \mid i \equiv 2 \bmod 4\ \}$, $V_3 = \{\ v_i \mid i \equiv 3 \bmod 4\ \}$. 2 pont

Ekkor G-ben V_0 egy teljes gráfot feszít, V_2 is egy teljes gráfot feszít, ezenkívül V_1 és V_3 között minden él be van húzva. Más él nincs. 3 pont

Tehát G két teljes gráf és egy teljes páros gráf diszjunkt uniója. 2 pont

Viszont a teljes gráfok és a páros gráfok (nem is kell, hogy teljes legyen) perfektek, ezért ezek uniója is az. Tehát G minden n-re perfekt. 3 pont

4. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_{100}$. A v_i és v_j ($i > j$) csúcsok pontosan akkor vannak összekötve, ha $i = j + 1$, illetve ha $i = 72$ és $j = 70$. (Vagyis G-nek 100 éle van.)

Hasonlóan, a H gráf csúcsai $u_1, u_2, \dots, u_{100}$. Az u_i és u_j ($i > j$) csúcsok pontosan akkor vannak összekötve, ha $i = j + 1$, illetve ha $i = 52$ és $j = 50$. (Vagyis H-nak is 100 éle van.)

Bizonyítsuk be, hogy G és H gyengén izomorfak.

1. megoldás: A G gráf egy háromszög, amelynek két csúcsáról egy 69 és egy 28 hosszú út lóg le. A H gráf pedig egy háromszög, amelynek két csúcsáról egy 49 és egy 48 hosszú út lóg le. 3 pont

A Whitney tételből tudjuk, hogy van három operáció, amelyek ismétlésével (egy adott gráfból kiindulva) csupa egymással gyengén izomorf gráfot kapunk. Ebből kettőt fogunk használni, az elvágó csúcs mentén szétszedés és két (különböző komponensben levő) csúcs összeragasztása. 3 pont

Vágjuk el G-t v_{21}-nél és a levágott 20 hosszú utat a V_{21}-ből kapott végpontjánál ragasszuk rá v_{100}-ra. Így éppen a H-val izomorf gráfot kaptunk,tehát a két gráf gyengén izomorf. 4 pont

2. megoldás. A G gráf egy háromszög, amelynek két csúcsáról egy 69 és egy 28 hosszú út lóg le. A H gráf pedig egy háromszög, amelynek két csúcsáról egy 49 és egy 48 hosszú út lóg le. 3 pont

Megadunk egy kör- és vágástartó bijekciót G és H élei között. G vágásai a háromszögön kívüli élek, illetve a háromszög bármely két éle. Egyetlen köre van, a háromszög. Ugyanez igaz H-ra is. Tehát feleltessuk meg egymásnak tetszőlegesen G és H háromszögön kívüli éleit, es feleltessük meg G három, háromszöget alkotó élét H három, háromszöget alkotó élének. Ez a megfeleltetés kör- és vágástartó, tehát G és H gyengén izomorfak. 7 pont

3. megoldás. A G gráf egy háromszög, amelynek két csúcsáról egy 69 és egy 28 hosszú út lóg le. A H gráf pedig egy háromszög, amelynek két csúcsáról egy 49 és egy 48 hosszú út lóg le. 3 pont

A Whitney tételek alapján elég belátni, hogy van olyan duálisa G-nek illetve H-nak, amelyek egymással izomorfak. 2 pont

Rajzoljuk le G-t úgy, hogy a két lelógó út a háromszögön kívül van. Ekkor a duálisának két csúcsa van, egy a végtelen tartománynak felel meg, v, és egy a háromszög belsejének, b. Ekkor az utak miatt b 97-szer lesz önmagával összeköve, a háromszög miatt pedig v és b között lesz 3 párhuzamos él. 2 pont

Ha hasonlóan lerajzoljuk H-t, akkor ugyanígy látható, hogy ugyanez a gráf lesz a duálisa. 2 pont

Tehát G és H gyengén izomorfak. 1 pont

5. G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$. A v_i és v_j $(i > j)$ csúcsok pontosan akkor vannak összekötve, ha i nem osztható j-vel. Milyen n-re lesz G perfekt?

Legyen $v_j \preceq v_j$ akkor és csak akkor, ha i osztható j-vel. Ez a reláció reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, tehát ez egy részbenrendezés. 3 pont

Legyenek a H gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$. A v_i és v_j $(i > j)$ csúcsok pontosan akkor vannak összekötve, ha i *osztható* j-vel. A H gráf éppen a $\preceq$ részbenrendezés összehasonítás gráfja, tehát perfekt. 4 pont

Csakhogy G éppen H komplementere, tehát G is perfekt, minden n-re. 3 pont

6. A G 2017 csúcsú összefüggő, síkbarajzolt gráf duálisa, G^* egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van egy legalább 4-edfokú csúcsa.

Legyenek $d_1, \ldots, d_{2017}$ a csúcsok fokszámai. Mivel G összefüggő, nincs izolált pontja, tehát $d_i > 0$. 1 pont

Ha lenne 1-fokú pont, annak az egyetlen élnek a duálisban egy hurokél felelne meg, ami nem lehet, mert G^* egyszerű gráf. Tehát $d_i > 1$. 3 pont

Ha lenne 2-fokú pont, annak a két élnek a duálisban két párhuzamos él felelne meg, ami nem lehet, mert G^* egyszerű gráf. Tehát $d_i > 2$. 3 pont

Viszont nem lehet minden fokszám pontosan 3, mert akkor a fokszámok összege páratlan lenne, ami lehetetlen. Tehát van legalább 4-edfokú csúcs. 3 pont