

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

8. és 9. gyakorlat, 2017. október 27 és november 3.

Ramsey, Turán

Ramsey tétel (gráfokra, két színnel): Minden $k, l > 0$ számokhoz van olyan (legkisebb) $R = R(k, l)$ szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes gráf éleit tetszőlegesen kiszínezve pirossal és kézzel, vagy van egy k csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle piros, vagy egy l csúcsú, amelynek minden éle kék. Erdős–Szekeres: $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Ramsey tétel (gráfokra, r színnel): Minden $r > 0$, $k_1, k_2, \dots, k_r > 0$ számokhoz van olyan (legkisebb) $R = R(k_1, k_2, \dots, k_r)$ szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes gráf éleit tetszőlegesen kiszínezve az $1, 2, \dots, r$ színekkel, valamilyen $1 \leq i \leq r$ számra vagy van egy k_i csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle i színű.

Ramsey tétel (k -uniform hipergráfokra, r színnel): Minden $r > 0$, $k \geq 2$, $k_1, k_2, \dots, k_r > 0$ számokhoz van olyan (legkisebb) $R = R_k(k_1, k_2, \dots, k_r)$ szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes k -uniform hipergráf éleit tetszőlegesen kiszínezve az $1, 2, \dots, r$ színekkel, valamilyen $1 \leq i \leq r$ számra vagy van egy k_i csúcsú teljes rész-hipergráf, amelynek minden éle (k -asa) i színű.

Schur tétel: Minden $t > 0$ -ra létezik olyan $N = N(t)$ szám, amelyre teljesül, hogy akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \dots, N$ számokat t színnel, mindig lesznek olyan x, y, z egyszínű számok, amelyekre $x + y = z$.

Van der Waerden tétel: Minden $t, k > 0$ -ra létezik olyan $N = N(t, k)$ szám, amelyre teljesül, hogy akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \dots, N$ számokat t színnel, mindig lesz egy k tagú számtani sorozat, amelynek a tagjai egyszínűek.

Tetszőleges H gráfra $ex(n, H)$ jelöli az n csúcsú, H -t részgráfként nem tartalmazó gráfok maximális élszámát, $Ex(n, H)$ pedig az n csúcsú, H -t részgráfként nem tartalmazó, $ex(n, H)$ élű gráfok halmazát (izomorfia erejéig).

Legyen $n, r \geq 1$. Az n csúcsú, r osztályú $T(n, r)$ **Turán gráfnak** n csúcsa van, r osztályba osztva a lehető legegyszerűbben: ha $n = ar + b$, $r > b \geq 0$, akkor b osztályban $\lceil n/r \rceil$ csúcs van, $r - b$ osztályban pedig $\lfloor n/r \rfloor$ darab. Bármely két, különböző osztályhoz tartozó csúcs össze van kötve, az azonos osztályban levők nem.

Tetszőleges G gráfra legyen $|E(G)|$ G éleinek a száma.

Turán tétel (1941). $ex(n, K_{r+1}) = |E(T(n, r))|$. Ha pedig G egy n csúcsú gráf ami nem tartalmaz K_{r+1} -et részgráfként és $|E(G)| = |E(T(n, r))|$, akkor G izomorf a $T(n, r)$ Turán gráffal, azaz $Ex(n, K_{r+1}) = T(n, r)$.

Erdős, Kővári, Sós, Turán tétel (1954) Legyen $r \geq s \geq 2$. Egy n csúcsú gráfnak, amely nem tartalmaz $K_{r,s}$ -t részgráfként legfeljebb $c_{r,s} n^{2-1/s}$ éle van, valamilyen $c_{r,s}$ konstansra.

1. Mutassuk meg, hogy minden legalább 10 csúcsú G gráfra $\omega(G) \geq 4$ vagy $\alpha(G) \geq 3$.
2. Bizonyítsuk be, hogy $R(3, 3, 3) \leq 17$ és azt is, hogy $R(3, 4) = 9$.
3. a. Egy teljes gráf éleit kiszíneztük pirossal és kézzel. Bizonyítsuk be, hogy van egy feszítőfa, amelynek minden éle ugyanolyan színű.
b. Igaz az állítás feszítőfa helyett Hamilton úttal is?
4. (Múlt heti házi) Igazoljuk, hogy $R_3(4, 4) \leq 21$.
5. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget: $R_3(k, l) \leq R_2(R_3(k-1, l), R_3(k, l-1)) + 1$. Ez (nagyságrendileg) milyen felső korlátot ad $R_3(k, k)$ -ra?
6. Igazoljuk, hogy $c \geq 3$ esetén $R_t(n_1, n_2, \dots, n_c) \leq R_t(n_1, n_2, \dots, n_{c-2}, R_t(n_{c-1}, n_c))$ teljesül.
7. Tegyük fel, hogy tudjuk, hogy a Van der Waerden tétel igaz 2 szín felhasználásával, mutassuk meg ebből, hogy igaz 3 színnel is, sőt több színnel is.
8. Mutassuk meg, hogy minden k pozitív egészhez létezik olyan $N(k)$ küszöb, hogy ha $n > N(k)$ és az $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz részhalmazait k színnel színezzük, akkor léteznek az $[n]$ halmaznak olyan diszjunkt X_1 és X_2 részhalmazai, hogy X_1, X_2 és $X_1 \cup X_2$ színe megegyezik. Igaz-e az állítás, három diszjunkt részhalmazra?
9. Legyen $H(V, E)$ egy k -uniform hipergráf, amelynek kevesebb mint 2^{k-1} éle van. Bizonyítsuk be, hogy H csúcsai kiszínezhetők pirossal és kézzel úgy, hogy semelyik él sem egyszínű.
10. (Végtelen Ramsey tétel) Egy végtelen sok csúcsú teljes gráf éleit kiszíneztük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy van egy végtelen sok csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle ugyanolyan színű.
11. Mutassuk meg, hogy ha G n csúcsú, egyszerű gráf, akkor $\max(\alpha(G), \omega(G)) \geq 1 + \log_4 n$.

12. Tegyük fel, hogy a sík pontjait kiszínezte valaki pirosra és zöldre úgy, hogy mindkét színt használta. Mutassuk meg, hogy mindenképpen keletkezett egymástól egységnyi távolságban levő pontpár, melynek egyik tagja piros, a másik zöld! Igaz-e, hogy a sík ilyen kiszínezésekor biztosan található olyan egységoldalú szabályos háromszög, aminek csúcsai egyszínűek?
13. (Múlt heti házi feladat) Tegyük fel, hogy a sík pontjait kiszínezte valaki pirosra és zöldre úgy, hogy nincs két zöld pont egymástól egység távolságra. Legyen T egy tetszőleges háromszög. Bizonyítsuk be, hogy van egy T -vel egybevágó háromszög, amelynek mind a három csúcsa piros.
14. Legyen a_n a természetes számok tetszőleges szigorúan növvő végtelen sorozata. Mutassuk meg, hogy található akármilyen hosszú részsorozat, amelyben bármely két elem relatív prím, vagy semelyik két elem sem relatív prím.
15. Kiszínezhetők-e az egész számok két színnel úgy, hogy ne létezen egyszínű végtelen számtani sorozat? Hát mértani?
16. Mutassunk olyan $(k-1)^2$ pontú gráfot, amelyben nincs sem teljes k -as sem üres k -as!
17. (Múlt heti házi) P egy olyan síkbeli ponthalmaz, amelyben bármely két pont közötti távolság elgész és nincs az összes pont egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy P véges sok pontból áll.
18. Bizonyítsuk be, hogy minden n -hez létezik olyan $K(n)$, hogy tetszőleges $K(n)$ különböző pont a síkon legalább n különböző távolságot határoz meg.
19. Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú gráfnak, ha nincsen benne
 - kör?
 - páratlan kör? (páros lehet)
 - páros kör? (páratlan lehet)
 - 2 élből álló út?
 - sem 3 élből álló út, sem kör?
 - feszítőfa?
20. Egy 90 fős társaságból bizonyos párok leveleznek egymással. Akárhogyan választunk ki közülük tíz embert, ezek között mindig van legalább kettő, akik leveleznek egymással. Bizonyítsuk be, hogy a levelező párok száma legalább 405.
21. Igazoljuk, hogy az n -csúcsú, m -osztályú $T_{n,m}$ Turán-gráf pontosan akkor nem tartalmaz Hamilton-kört, ha $m = 2$ és n páratlan.
22. Legyenek v_1, v_2, \dots, v_n síkbeli vektorok, $|v_i| \geq 1$. Legalább hány párba lesz $|v_i + v_j| \geq 1$?
23. Legkevesebb hány csúcsa lehet egy háromszögmentes, egyszerű G gráfnak, ha $|E(G)| \geq 2|E(K_k)|$?
24. Adott a síkon n , nem feltétlenül különböző pont. Legfeljebb mennyi lehet az ezek közül kiválasztható egységnyi távolságra levő pontpárok száma?
25. Mutassuk meg, hogy sík n különböző pontja és n különböző egyenese között legfeljebb $c \cdot n^{\frac{3}{2}}$ illeszkedés lehet, ahol c alkalmas konstans. (Illeszkedés: egy (pont, egyenes) pár, ahol a pont illeszkedik az egyenesre.)
26. Legfeljebb hány éle lehet egy n csúcsú gráfnak, ha élei kiszínezhetők úgy két színnel, hogy ne keletkezzen egyszínű háromszög.
27. Egy 49 csúcsú gráfnak 1030 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor a kromatikus száma legalább 8, és hogy pontosan 8 is lehet.
28. Egy n tagú társaságból bármely k ember között van 2 aki kezet fogott. Legalább hány kézfogás történt?

Házi feladat

1. Döntsük el, hogy igaz-e a következő állítás. Minden $n \geq 1$ -hez van olyan N , hogy akárhogyan színezzük ki az N elemű halmaz összes részhalmazát két színnel, található olyan n elemű részhalmaz, amelynek az összes részhalmaza ugyanolyan színű.
2. Mutassuk meg, hogy minden k pozitív egészhez létezik olyan $N(k)$ küszöb, hogy ha $n > N(k)$ és az $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz részhalmazait k színnel színezzük, akkor léteznek az $[n]$ halmaznak olyan diszjunkt X_1 és X_2 részhalmazai, hogy X_1 , X_2 és $X_1 \cup X_2$ színe megegyezik. Igaz-e az állítás, három diszjunkt részhalmazra?
3. a. Egy G gráfnak n csúcsa van, és minden csúcs fokszáma legalább 100. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 100 hosszú (100 csúcsú) utat!
 b. Egy G gráfnak n csúcsa és e éle van, $e > 100n$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 100 hosszú (100 csúcsú) utat!
4. Mutassunk minden n -re olyan n csúcsú és $e > 40n - 5000$ élű gráfot, amelyben nincs 100 hosszú (100 csúcsú) út!