

## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

7. gyakorlat, 2017. október 20.

### Ramsey elmélet

Ramsey tétel (gráfokra, két színnel): Minden  $k, l > 0$  számokhoz van olyan (legkisebb)  $R = R(k, l)$  szám, amelyre igaz, hogy az  $R$  csúcsú teljes gráf éleit tetszőlegesen kiszínezve pirossal és kékkel, vagy van egy  $k$  csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle piros, vagy egy  $l$  csúcsú, amelynek minden éle kék. Erdős–Szekeres:  $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$ .

Ramsey tétel (gráfokra,  $r$  színnel): Minden  $r > 0$ ,  $k_1, k_2, \dots, k_r > 0$  számokhoz van olyan (legkisebb)  $R = R(k_1, k_2, \dots, k_r)$  szám, amelyre igaz, hogy az  $R$  csúcsú teljes gráf éleit tetszőlegesen kiszínezve az  $1, 2, \dots, r$  színekkel, valamilyen  $1 \leq i \leq r$  számra vagy van egy  $k_i$  csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle  $i$  színű.

Ramsey tétel ( $k$ -uniform hipergráfokra,  $r$  színnel): Minden  $r > 0$ ,  $k \geq 2$ ,  $k_1, k_2, \dots, k_r > 0$  számokhoz van olyan (legkisebb)  $R = R_k(k_1, k_2, \dots, k_r)$  szám, amelyre igaz, hogy az  $R$  csúcsú teljes  $k$ -uniform hipergráf éleit tetszőlegesen kiszínezve az  $1, 2, \dots, r$  színekkel, valamilyen  $1 \leq i \leq r$  számra vagy van egy  $k_i$  csúcsú teljes rész-hipergráf, amelynek minden éle ( $k$ -asa)  $i$  színű.

Schur tétel: Minden  $t > 0$ -ra létezik olyan  $N = N(t)$  szám, amelyre teljesül, hogy akárhogyan színezzük ki az  $1, 2, \dots, N$  számokat  $t$  színnel, mindig lesznek olyan  $x, y, z$  egyszínű számok, amelyekre  $x + y = z$ .

Van der Waerden tétel: Minden  $t, k > 0$ -ra létezik olyan  $N = N(t, k)$  szám, amelyre teljesül, hogy akárhogyan színezzük ki az  $1, 2, \dots, N$  számokat  $t$  színnel, mindig lesz egy  $k$  tagú számtani sorozat, amelynek a tagjai egyszínűek.

### Házi feladat

1.  $P$  egy olyan síkbeli ponthalmaz, amelyben bármely két pont közötti távolság egész és nincs az összes pont egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy  $P$  véges sok pontból áll.
2. Igazoljuk, hogy  $R_3(4, 4) \leq 21$ .