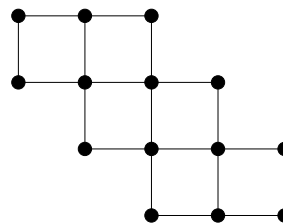
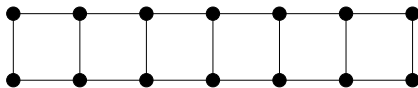


## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

5. gyakorlat, 2017. október 6.

### Dualitás, ismétlés

1. Bizonyítsuk be, hogy egy síkbarajzolható gráf tartományai akkor és csak akkor színezhetők ki két színnel, ha minden pont foka páros.
2. Gyengén izomorfak-e az itt látható gráfok?



3. Bizonyítsuk be, két fa pontosan akkor gyengén izomorf, ha ugyanannyi pontjuk van.
4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges egyszerű, síkgráf élhalmaza előáll, mint 2 páros gráf élhalmazának uniója.
5. A  $G$  és a  $G^*$  véges egyszerű gráfok egymás duálisai. Bizonyítsuk be, hogy  $\min\{\delta(G), \delta(G^*)\} = 3$ .  $\delta$  a legkisebb fokszám.
6. Legyen  $G$  olyan  $n \geq 3$  csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, melyben az élek száma  $3n - 6$ . Mennyi  $G$  duálisának maximális fokszáma?
7. Tegyük fel, hogy  $G$  síkbarajzolt gráf,  $G$  minden lapja háromszög és  $G^*$  minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van  $G$ -nek?
8. Egy gráfot *külsíkgráfnak* nevezünk, ha lerajzolható a síkba az élek kereszteződése nélkül úgy, hogy minden csúcs rajta van az egyik (például a külső) tartomány határán. (a) Legfeljebb hány éle lehet egy külsíkgráfnak? (b) Adjunk a Kuratowski-tételhez hasonló karakterizációt a külsíkgráfokra, azaz adjunk meg egy olyan (véges)  $\mathcal{F}$  gráfalmazt, hogy igaz legyen a következő: egy gráf pontosan akkor külsíkgráf, ha nem tartalmaz  $\mathcal{F}$ -beli gráffal topologikusan izomorf részgráfot! (c) Legfeljebb mennyi a kromatikus száma egy külsíkgráfnak?
9. Legfeljebb mennyi a perfekt síkgráfok kromatikus száma?
10. Bizonyítsuk be, hogy minden (legalább három csúcsú) síkgráfnak van legalább három olyan csúcsa, amelyeknek a foka kevesebb mint hat.

1. ZH, 2012. március 12. 10.15-11.45, J202

1. Egy összefüggő  $G$  síkbarajzolt gráfnak 200 csúcsa és 300 éle van. Tudjuk, hogy a duálisa egyszerű. Bizonyítsuk be, hogy  $G$ -ben a maximális fokszám 3.

3. Tetszőleges  $G$  síkbarajzolt gráfra legyen  $n(G)$  a csúcsok,  $e(G)$  az élek,  $t(G)$  a tartományok száma. Határozzuk meg az  $e(G) - n(G) - 3t(G)$  mennyiség maximumát. (Ha  $G$  tetszőleges síkbarajzolt gráf lehet.)

1. Pót ZH, 2013. május 14. 14.15-15.45, H 406

4. Legyenek  $G$  csúcsai  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ,  $v_i$  és  $v_j$  között akkor és csak akkor van él, ha  $i + j$  nem osztható 3-mal. Milyen  $n$ -re lesz  $G$  perfekt?

6. 10000 ember sorban áll a Kombi 2 vizsgán. Bizonyítsuk be, hogy vagy található 100 ember a sorban úgy, hogy e 100 ember között aki hátrább áll, az mindig *alacsonyabb* az előbbre állónál, vagy pedig található 100 ember a sorban úgy, hogy e 100 ember között aki hátrább áll, az mindig *magasabb* az előbbre állónál.

### Házi feladat.

1. Tetszőleges összefüggő síkbarajzolható  $G$  gráfhoz mutassunk olyan, önmagával duális  $G'$  síkbarajzolt gráfot, aminek  $G$  feszített részgráfja.

2. Jelölje  $F_n = K_{n,n} - nK_2$  azt a páros gráfot, melyet úgy kapunk a  $K_{n,n}$  teljes páros gráfból, hogy elhagyjuk belőle egy teljes párosítás éleit. Milyen  $n$ -ek esetén lesz  $F_n$  síkbarajzolható?