

## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

4. gyakorlat, 2017. szeptember 29.

### Összehasonlítás gráfok, súlyátrendező módszer

1. Adott egy  $ABC$  háromszög, és benne  $n$  pont. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható  $\sqrt[3]{n}$  pont úgy, hogy bármely kettő által meghatározott egyenes a háromszögnek ugyanazt a két oldalát metszi.
2. Legyen  $G(V, E)$  egy gráf, amelyre  $E = E_1 \cup E_2$ ,  $G_1(V, E_1)$  és  $G_2(V, E_2)$  perfektek,  $|V| = 65$ . Bizonyítsuk be, hogy  $G$  tartalmaz egy teljes ötöst vagy egy üres ötöst. (Öt pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy semelyik kettő sincs.)
3. Adott 50 egyforma hosszú, különböző intervallum egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy (a) vagy van olyan pont amelyet legalább 8 intervallum tartalmaz, vagy pedig van 8 páronként diszjunkt intervallum. (b) Ugyanez, csak 7-tel és 9-cel.
4. Tetszőleges  $G$  síkbarajzolt gráfra legyen  $t = t(G)$  a tartományok száma, és legyenek  $F_1, F_2, \dots, F_t$  a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is).  $|F_i|$  jelentse az  $F_i$  tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Határozzuk meg a

$$s(G) = \sum_{i=1}^t (|F_i| - 1)$$

mennyiség maximumát ha  $G$  tetszőleges 10 csúcsú síkbarajzolt gráf lehet.

5. Egy összefüggő  $G$  síkbarajzolt gráfnak 200 csúcsa és 300 éle van. Tudjuk, hogy a duálisa egyszerű. Bizonyítsuk be, hogy  $G$ -ben a maximális foksám 3.
6. Tetszőleges  $G$  síkbarajzolt gráfra legyen  $n(G)$  a csúcsok,  $e(G)$  az élek,  $t(G)$  a tartományok száma. Határozzuk meg az  $e(G) - n(G) - 3t(G)$  mennyiség maximumát. (Ha  $G$  tetszőleges síkbarajzolt gráf lehet.)
7. Legyen  $G$  egy páros, síkbarajzolt gráf. Képezzük a  $G'$  gráfot a következő módon. Vegyünk fel egy-egy csúcsot  $G$  minden tartományában, és kössük össze a különböző szomszédos tartományoknak megfelelő csúcsokat. Ezenkívül kössük össze minden tartománynak megfelelő csúcsot  $G$  azon csúcsaival, amelyek a megfelelő tartomány határán vannak. Bizonyítsuk be, hogy  $\chi(G') \leq 6$ .

Mutassunk olyan  $G$  páros, nem feltétlenül egyszerű, síkbarajzolt gráfot, amelyre a fenti módon képezett  $G'$  gráf kromatikus száma 5.

#### Házi feladat.

1. Legyen  $G(V, E)$  egy gráf, amelyre  $E = E_1 \cup E_2$ ,  $G_1(V, E_1)$  perfekt,  $G_2(V, E_2)$  páros gráf, és  $|V| = 163$ . Bizonyítsuk be, hogy  $G$  tartalmaz egy teljes tizest, vagy egy üres tizest. (Tíz pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy semelyik kettő.)

2. Tetszőleges  $n$  csúcsú  $G$  síkbarajzolt gráfra legyenek  $d_1, d_2, \dots, d_n$  a csúcsok foksámai,  $t = t(G)$  a tartományok száma, és legyenek  $F_1, F_2, \dots, F_t$  a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is).  $|F_i|$  jelentse az  $F_i$  tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Legyen

$$s(G) = \sum_{i=1}^t (|F_i| + a) + \sum_{i=1}^n (d_i + a).$$

Határozzuk meg  $a$  értékét úgy, hogy  $s(G)$  értéke ugyanannyi legyen minden, legalább 3 csúcsú, egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt  $G$  gráfra.