

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

3. gyakorlat, 2017. szeptember 22.

Összehasonlítás gráfok, Dilworth tétel

1. Van egy csomó kartondobozunk, melyek a G gráf csúcsainak felelnek meg. Két csúcs akkor van összekötve, ha a megfelelő dobozok közül egyik sem rakható a másikba. Igazoljuk, hogy G perfekt.
2. Adott a síkon néhány körvonal, ezekhez rendeljük a következő G gráfot. G csúcsai feleljenek meg egy-egy megadott körvonalnak, és kettő akkor legyen összekötve, ha a két megfelelő körvonal egyike teljesen a másik belsejében halad. Bizonyítsuk be, hogy az így megadott G gráf perfekt.
3. Adott egy ABC háromszög, és benne n pont. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható $\sqrt[3]{n}$ pont úgy, hogy bármely kettő által meghatározott egyenes a háromszögnek ugyanazt a két oldalát metszi.
4. Adott n pont a síkon. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük \sqrt{n} pont úgy, hogy bármely kettő által meghatározott egyenes az x -tengellyel *legalább* 30 fokos szöget zár be, vagy \sqrt{n} pont úgy, hogy bármely kettő által meghatározott egyenes az x -tengellyel *legfeljebb* 30 fokos szöget zár be.
5. Legyen (H, \prec) egy részbenrendezett halmaz. Egy x elem *maximális* (*minimális*), ha nem létezik olyan $y \in H$, amelyre $x \prec y$ ($y \prec x$).
 - a. Bizonyítsuk be, hogy H -ban a maximális (illetve a minimális) elemek halmaza egy antilánc.
 - b. Tegyük fel, hogy a maximális és minimális elemek *együtt* egy antiláncot alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy H összes eleme is egy antiláncot alkot.
6. Legyen (H, \prec) egy részbenrendezett halmaz, L egy maximális lánc, amelynek maximális eleme x , minimális eleme y . Legyen $A = \{z_1, \dots, z_a\}$ egy maximális antilánc H -ban.

Végül legyen

$$H^+ = \{h \in H \mid \exists z \in A : z \preceq h\},$$

és

$$H^- = \{h \in H \mid \exists z \in A : h \preceq z\}.$$

- a. Bizonyítsuk be, hogy $H^+ \cap H^- = A$.
- b. Bizonyítsuk be, hogy $H^+ \cup H^- = H$.
- c. Bizonyítsuk be, hogy $x \in H^+$, $y \in H^-$.

Házi feladat.

1. Igaz, hogy egy részbenrendezett halmazban minden maximális lánc és maximális antilánc metszi egymást?