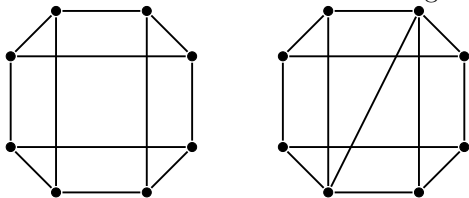


Kombinatorika és gráfelmélet 2.

2. gyakorlat, 2017. szeptember 15.

Perfekt gráfok

- (*) (Módosított shift gráf) Legyen $m > 1$. Az T_m módosított shift gráf csúcsai legyenek az (i, j, k) számhármások, ahol $1 \leq i < j < k \leq m$. Két csúcset, mondjuk (i, j, k) és (i', j', k') akkor és csak akkor összekötünk, ha $i = j'$ és $j = k'$, illetve ha $i' = j$ és $j' = k$. Vagyis ha az egyik hármassal az első két eleme ugyanaz, mint a másik hármassal a második két eleme.
 - Bizonyítsuk be, hogy T_m nem tartalmaz háromszöget.
 - Bizonyítsuk be, hogy $\chi(T_m) \rightarrow \infty$ ha $m \rightarrow \infty$.
- Képezzük a G' gráfot a G perfekt gráfból úgy, hogy egy G -től diszjunkt v csúcset összekötünk G egy klikkjének minden csúcsával. Mutassuk meg, hogy G' is perfekt gráf.
- Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf pontosan akkor perfekt, ha G minden G' feszített részgráfjának van olyan független ponthalmaza, ami G' minden maximális méretű klikkjét metszi.
- Írjuk le azokat a G gráfokat, amelyeknek minden H részgráfjára $\omega(H) = \chi(H)$.
- Legyen G olyan n csúcsú véges egyszerű gráf, amelyik nem perfekt, de ha tetszőleges csúcsát elhagyjuk, az így kapott gráf már perfekt. Mutassuk meg, hogy $n - 1$ nem lehet prímszám.
- A G gráf *splitgráf*, ha csúcshalmaza előáll egy klikk és egy független ponthalmaz uniójaként. Mutassuk meg, hogy minden splitgráf perfekt.
- Perfekt-e az alábbi ábrán látható gráfok?



- Legyen adott egy T fa és ennek F_1, \dots, F_n részfái. Megadunk egy G gráfot az $\{F_1, \dots, F_n\}$ halmazon: F_i és F_j ($i \neq j$) akkor legyen szomszédos, ha van közös csúcsuk. Bizonyítsd be, hogy G perfekt!
- Legyen a_1, a_2, \dots, a_n egy számsorozat. Ebből képezzük a G gráfot a v_1, v_2, \dots, v_n csúcsokon a következő módon: minden $i > j$ számpárra a v_i és v_j csúcsok össze vannak kötve G -ben akkor és csak akkor, ha $a_i > a_j$.

Bizonyítsuk be, hogy G minden a_1, a_2, \dots, a_n sorozat esetén perfekt!
- (Erdős-Szekeres tétel) Legyen $A = a_1, a_2, \dots, a_m$ egy csupa különböző számból álló számsorozat, $m = kl + 1$, $k, l > 0$.
 - Bizonyítsuk be, hogy A tartalmaz egy $l + 1$ hosszú növekedő vagy egy $l + 1$ hosszú csökkenő részsorozatot.
 - Bizonyítsuk be, hogy az állítás $m = kl$ esetén már nem feltétlenül igaz.

Házi feladat

- Legyen a G gráf csúcshalmaza egy véges halmaz néhány tetszőleges részhalmaza. Két különböző csúcset akkor legyen szomszédos G -ben, ha a megfelelő részhalmazok közül valamelyik tartalmazza a másikat. Bizonyítsuk be, hogy G perfekt.
- Adott néhány intervallum (körív) egy körön. A G gráf csúcsai az intervallumoknak felelnek meg, kettő össze van kötve akkor és csak akkor, ha a megfelelő két intervallum metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 2\omega(G)$.