

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

11. gyakorlat, 2017 november 17.

Hipergráfok

Sperner tétel (1928) $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, minden $A, B \in \mathcal{F}$ -re $A \not\subseteq B$ és $B \not\subseteq A$. Ekkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Egyenlőség esetén \mathcal{F} éppen $[n]$ összes $\lfloor n/2 \rfloor$, vagy az összes $\lceil n/2 \rceil$ elemű részhalmazából áll.

Erdős – De Bruijn tétel (1948) $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, minden $A \in \mathcal{F}$ -re $|A| \geq 2$, és tetszőleges $1 \leq i < j \leq n$ számokhoz pontosan egy $A \in \mathcal{F}$ van, amelyre $i, j \in A$. Ekkor $|\mathcal{F}| = 1$ vagy $|\mathcal{F}| \geq n$.

1. a. Egy fának legfeljebb hány *összefüggő* részgráfját választhatjuk ki úgy, hogy egyik kiválasztott részgráf se legyen részgráfja egy másik kiválasztott részgráfnak? b. Egy fának legfeljebb hány *fesztett* részgráfját választhatjuk ki úgy, hogy egyik kiválasztott részgráf se legyen részgráfja egy másik kiválasztott részgráfnak?
2. Legyen \mathcal{F} egy olyan halmazrendszer, ami nem tartalmaz $s + 1$ hosszú láncot (azaz $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{s+1}$ halmazokat). Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^n \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \leq s$, ahol f_k a k méretű halmazok számát jelöli.
3. Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[2n]}$ olyan metsző halmazrendszer, amely minden tagjának páros az elemszáma. Mutassuk meg, hogy \mathcal{F} -nek legfeljebb 2^{2n-2} tagja lehet.
4. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráfnak bármely két éle diszjunkt vagy az egyik tartalmazza a másikat. Legfeljebb hány éle lehet \mathcal{H} -nak?
5. Legfeljebb hány klubot alapíthat MOD-3-FALVA n lakója? Ha A_i jelöli az i -dik klub tagságát, akkor $|A_i| \not\equiv 0 \pmod{3}$ és minden $i \neq j$ -re $|A_i \cap A_j| \equiv 0 \pmod{3}$. (*)
6. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf nem tartalmaz kört, azaz nincs olyan páronként különböző csúcsokból és hiperélekből álló $x_1, E_1, x_2, E_2, \dots, x_k, E_k, x_{k+1} = x_1$ sorozat, ahol az E_i él tartalmazza az x_i és x_{i+1} csúcsokat. Mutassuk meg, hogy ha \emptyset nem éle \mathcal{H} -nak és \mathcal{H} összefüggő is (azaz V nem állítható elő két diszjunkt nemüres V_1 és V_2 halmaz uniójaként úgy, hogy minden hiperél valamelyik V_i halmaz része), akkor igaz, hogy $\sum\{|E| - 1 : E \in \mathcal{E}\} = |V| - 1$.
7. Mutassunk olyan $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszert, hogy \mathcal{F} bármely két tagjának metszete legalább két elemet tartalmaz és $|\mathcal{F}| = 2^{n-2}$. Létezik ennél nagyobb halmazrendszer is a fenti tulajdonsággal?
Hasznos igazság: $\binom{2k}{k} \leq 2^{2k-1}$. (Sőt, $\leq 2^{2k}/\sqrt{k}$ ha k elég nagy.)
8. Tegyük fel, hogy $k < n/3$ és $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ olyan k -uniform halmazrendszer, amelyben nincs három páronként diszjunkt halmaz. Mutassuk meg, hogy $|\mathcal{F}| \leq 4\binom{n-1}{k-1}$.

Régi zárthelyi feladatok

1. Tegyük fel, hogy a gömbön úgy adott 12, egymástól nem feltétlenül különböző pont, hogy azokból legalább 49 különböző egységtávolságra lévő pontpár választható ki. Igazoljuk, hogy a gömb sugara kisebb 1-nél.
2. Legfeljebb hány vektort tartalmazhat az $X \subseteq \{0, 1\}^n$ halmaz, ha tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in X$ vektorokra létezik olyan $i \in [n]$ koordináta, amire $\underline{u}_i = 1$ és $\underline{v}_i = 0$?

Kombinatorika és gráfelmélet II
2. Pót ZH, 2013. május 14. 14.15-15.45, H 406

1. Az $R(10, 10) + 1$ csúcsú gráf éleit kiszíneztük három színnel, pirossal, kékkel és zölddel, de csak egy él színe piros. Bizonyítsuk be, hogy található egy 10 csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle ugyanolyan színű.

2. Legyen $k > 0$ tetszőleges egész, és tegyük föl, hogy ki van színezve az összes valós szám k színnel. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan egyszínű, $a, b, c > 0$ számok, amelyekre $a^2 + b^2 = c^2$.

3. $\mathcal{F} \subseteq 2^{[2013]}$ egy 10 és 20 elemű halmazokból álló, metsző halmazrendszer. (A halmazrendszer semelyik két halmaza sem diszjunkt.) Mennyi $|\mathcal{F}|$ lehetséges legnagyobb értéke?

4. G egy 100 csúcsú és 3831 élű egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 9, páronként éldiszjunkt teljes 5 csúcsú részgráfot.

5. Az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszeréről tudjuk, hogy minden $A \in \mathcal{F}$ -re $|A|$ páratlan, de minden $A, B \in \mathcal{F}$ -re $|A \cap B|$ páros. Bizonyítsuk be, hogy

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

6. Az $\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszerben minden $i \neq j \neq k$ -ra $|A_i \cap A_j| = |A_k \cap A_j|$. Bizonyítsuk be, hogy $m \leq n + 1$.