Kombinatorika és gráfelmélet II
2. **Pót**ZH, 2015. május 12. 12.15-13.45, H 405.
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel llapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének vgiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóban szereplő pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Adott a síkon 2^{100} görbe. Bizonyítsuk be, hogy vagy van köztük 50 olyan, amelyek páronként diszjunktak, vagy 50 olyan, amelyek páronként metszik egymást.

Legyenek a görbék $g_1, g_2, \dots, g_{2^{100}}$. Definiáljunk egy G gráfot a $v_1, v_2, \dots, v_{2^{100}}$ csúcsokon. Tetszőleges v_i és v_j csúcs pontosan akkor legyen összekötve éllel, ha g_i és g_j metszi egymást. 3 pont

Az Erdős-Szekeres tétel szerint $R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$, vagyis $R(50,50) \leq \binom{98}{49}$. 2 pont

Viszont $\binom{98}{49} < 2^{98}$, hiszen $\binom{98}{49}$ egy 98 elemű halmaz összes 49 elemű részhalmazainak a száma, 2^{98} pedig egy 98 elemű halmaz összes, akárhány elemű részhalmazainak a száma. Ebből persze az is következik, hogy $\binom{98}{49} < 2^{100}$. 3 pont

Tehát a 2^{100} csúcsú G-ben mindenképpen van egy 50 csúcsú teljes, vagy egy 50 csúcsú üres részgráf, ami 50 metsző vagy 50 diszjunkt görbét jelent. 2 pont

2. Határozzuk meg a 33 csúcsú, háromszöget (teljes hármast) nem tartalmazó, *nem összefüggő* gráfok maximális élszámát.

Tegyük fel, hogy a G gráf 33 csúcsú, nem összefüggő, nem tartalmaz háromszöget, és ezen feltételek mellett a lehető legtöbb éle van. 1 pont

Ha a G gráfnak három, vagy több komponense lenne, akkor behúzhatnánk egy élt két komponens közé. A kapott gráf sem összefüggő, nem tartalmaz háromszöget, és eggyel több éle van. Tehát a lehető legtöbb élű G gráfnak pontosan két összefüggő komponense van. 2 pont

Legyen a két komponens G_1 és G_2, méretük n_1 és n_2, $n_1 + n_2 = 33$. A Turán tétel alapján G_1 izomorf a $T_{n_1,2}$ Turán gráffal, G_2 pedig a $T_{n_2,2}$ Turán gráffal. Ezek teljes páros gráfok, (majdnem) egyforma osztályokkal, legyenek ezek A_1, B_1, illetve A_2, B_2. 2 pont

Feltehetjük, hogy $n_1 > n_2$, ekkor G_1 valamelyik osztálya nagyobb, mint G_2 valamelyik osztálya, mondjuk $|A_1| > |A_2|$. Viszont ez azt jelenti, hogy ha átrakunk egy csúcsot B_2-ből B_1-be (úgy, hogy továbbra is teljes páros gráfok legyenek), akkor több élünk lesz, az új gráf sem összefüggő és nem tartalmaz háromszöget. 2 pont

Ezt egészen addig csinálhatjuk, amíg az egyik komponens már csak egy izolált pontból áll. 1 pont

Tehát G más nem lehet, csak egy $T_{32,2}$ Turán gráf, és egy izolált pont uniója. Ennek pedig $16^2 = 256$ éle van. 2 pont

3. Bizonyítsuk be, hogy minden k-ra létezik egy $M(k)$ a következő tulajdonsággal. Akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \dots, M(k)$ számokat k színnel, léteznek olyan páronként különböző, egyszínű, a, b, c számok, amelyekre $a + 2b = 3c$.

A Van der Waerden tétel szerint minden k-ra és n-re létezik egy (legkisebb) $N = N(k,n)$ szám azzal a tulajdonsággal, hogy akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \dots, N$ számokat k színnel, lesz köztük egy egyszínű n hosszú számtani sorozat. Pontosabban: léteznek olyan $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq N$ számok, amelyek számtani sorozatot alkotnak és egyszínűek. 2 pont

Belátjuk, hogy $M(k) \leq N(k,4)$. Színezzük ki az $1, 2, \dots, N(k,4)$ számokat k színnel. Ekkor a Van der Waerden tétel szerint léteznek olyan $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \leq N(k,4)$ számok, amelyek számtani sorozatot alkotnak és egyszínűek. 4 pont

Legyen $b = a_1$, $c = a_3$, $a = a_4$. Ekkor $c - b = a_3 - a_1$, $a - c = a_4 - a_3$, tehát $a - c = 2(c - b)$, átrendezve $a + 2b = 3c$. 4 pont

4. $\mathcal{F} \subseteq 2^{[2015]}$ egy 1000 és 1016 elemű halmazokból álló, metsző halmazrendszer. (A halmazrendszer semelyik két halmaza sem diszjunkt.) Mennyi $|\mathcal{F}|$ lehetséges legnagyobb értéke?

Legyen

$$\mathcal{F}_1 = \{A \subseteq [2015] \; | A \in \mathcal{F}, |A| = 1000\},$$

és legyen

$$\mathcal{F}_2 = \{A \subseteq [2015] \; | A \in \mathcal{F}, |A| = 1016\}.$$

1 pont

Mivel $\mathcal{F}_1$ egy metsző halmazrendszer, az Erdős-Ko-Rado tétel alapján $|\mathcal{F}_1| \leq \binom{2014}{999}$. 2 pont

Mivel $\mathcal{F}_2$ 1016 elemű halmazokból áll, ezért $|\mathcal{F}_2| \leq \binom{2015}{1016}$. 2 pont

Tehát $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| \leq \binom{2014}{999} + \binom{2015}{1016}$. 1 pont

Ennyi el is érhető, vegyük az 1 elemet tartalmazó 100 elemű halmazokat és az összes 1016 elemű halmazt. Ez egy metsző halmazrendszer és éppen $\binom{2014}{999} + \binom{2015}{1016}$ halmazból áll. 3 pont

Tehát $|\mathcal{F}|$ lehetséges legnagyobb értéke $\binom{2014}{999} + \binom{2015}{1016}$. 1 pont

5. G egy páros gráf A és B osztályokkal. $|A| = 19$, $|B| = 18$. Tetszőleges két A-beli csúcsnak pontosan egy közös szomszédja van B-ben.

Bizonyítsuk be, hogy van három olyan A-beli csúcs, amelyeknek van közös szomszédja B-ben.

Legyenek A elemei $a_1, a_2, \ldots, a_{19}$. Minden i-re ($1 \leq i \leq 19$) legyen $B_i \subseteq B$ a_i szomszédainak a halmaza. A feltétel szerint minden $i \neq j$ esetén $|B_i \cap B_j| = 1$, mert a_i-nek és a_j-nek pontosan egy közös szomszédja van B-ben. 2 pont

Tegyük fel, hogy a B_i halmazok mind különbözőek. Ekkor a 18 elemű B halmaznak lenne 19 részhalmaza azzal a tulajdonsággal, hogy bármely kettő metszete pontosan 1 elemű. Csakhogy ez ellentmond a Fisher egyenlőtlenségnek, amely szerint legfeljebb 18 ilyen részhalmaz lehet. 3 pont

Tehát van ket részhalmaz, mondjuk B_1 és B_2, amelyek egyenlőek, vagyis $B_1 = B_2$. De ekkor $B_1 = B_2 = B_1 \cap B_2$ és a feltétel szerint $|B_1 \cap B_2| = 1$, ezért $|B_1| = |B_2| = 1$. 2 pont

Legyen $B_1 = B_2 = \{b\}$. Tudjuk, hogy $|B_1 \cap B_3|$ is 1, ami itt azt jelenti, hogy $b \in B_3$, vagyis a b elem a_1, a_2 és a_3 közös szomszédja B-ben. 3 pont

6. Legyen $n \geq 3$. Az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszerről tudjuk, hogy ha $A, B \in \mathcal{F}$, és $A \subset B$, akkor $|B| = n - 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + n.$$

Mutassunk olyan halmazrendszert, amely kielégíti a fenti feltételt és éppen ennyi halmazból áll.

Legyen

$$\mathcal{F}_1 = \{\ A \in \mathcal{F} \mid |A| = n - 1\}$$

és legyen

$$\mathcal{F}_2 = \{\ A \in \mathcal{F} \mid |A| \neq n - 1\}.$$

2 pont

Tegyük fel, hogy $A, A' \in \mathcal{F}_2$ és $A \subset A'$. Ekkor a feltétel szerint $|A'| = n - 1$, viszont az $\mathcal{F}_2$-höz tartozó halmazok nem lehetnek $n - 1$ eleműek. Ezért $\mathcal{F}_2$ Sperner rendszert alkot. 2 pont

Ezért a Sperner tétel szerint

$$|\mathcal{F}_2| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

1 pont

Ugyanakkor, mivel $\mathcal{F}_1$-ben minden halmaz $n-1$ elemű,

$$|\mathcal{F}_1| \le \binom{n}{\lfloor n-1} = n.$$

1 pont

Tehát

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + n.$$

1 pont

Ennyi el is érhető: Vegyük az összes $\lfloor n/2 \rfloor$ elemű, és az összes $n-1$ elemű részhalmazt, ezekből összesen éppen ennyi van, és kielégítik a feltételt. 3 pont