Kombinatorika és gráfelmélet II

2. ZH, 2015. április 27. 10.15-11.45, E 505.

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel llapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének vgiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóban szereplő pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Bizonyítsuk be, hogy $R(3,3,6) \le R(3,3,5) + 2R(3,6)$.

($R(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ a legkisebb R szám azzal a tulajdonsággal, hogy egy teljes R csúcsú gráf éleit akárhogy színezzük az $1, 2, \ldots, m$ színekkel, valamilyen i–re lesz egy k_i csúcsú teljes részgráf, amelynek az összes éle i színű.)

Azt kell bebizonyítani, hogy egy $R = R(3,3,5) + 2R(3,6)$ csúcsú teljes gráf éleit akárhogyan színezzük pirossal, kékkel és zölddel, vagy lesz egy 3 csúcsú teljes részgráf (háromszög), amelynek az összes éle piros, vagy egy háromszög, amelynek az összes éle kék, vagy egy 6 csúcsú teljes részgráf, amelynek az összes éle zöld. Vegyünk tehát egy $R = R(3,3,5)+2R(3,6)$ csúcsú K_R teljes gráfot és színezzük ki az éleit az pirossal, kékkel és zölddel. 1 pont

Legyen v K_R tetszőleges csúcsa. Innen $R-1$ él indul ki. Tehát ezek közül vagy legalább $R(3,6)$ darab piros, vagy legalább $R(3,6)$ darab kék, vagy pedig legalább $R(3,3,5)$ darab zöld. Hiszen ellenkező esetben összesen is csak $R(3,3,5) - 1 + R(3,6) - 1 + R(3,6) - 1 = R - 3$ él indulhatna ki v-ből. 2 pont

Tegyük fel, hogy legalább $R(3,6)$ darab piros él indul ki v-ből. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_m$ a v-ből induló piros élek végpontjai, $m \ge R(3,6)$. Ha valamelyik v_iv_j él piros, akkor vv_iv_j egy piros háromszög, tehát készen vagyunk. Ha viszont $v_1, v_2, \ldots, v_m$ között az összes él kék vagy zöld, akkor, mivel $m \ge R(3,6)$, találhatunk egy háromszöget, amelynek az összes éle kék, vagy egy 6 csúcsú teljes részgráfot, amelynek az összes éle zöld, tehát megint készen vagyunk. 3 pont

Ha legalább $R(3,6)$ darab kék él indul ki v-ből, akkor pontosan ugyanúgy járhatunk el, mint az eőbb. 1 pont

Végül tegyük fel, hogy legalább $R(3,3,5)$ darab zöld él indul ki v-ből. Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_m$ a v-ből induló zöld élek végpontjai, $m \ge R(3,3,5)$. Mivel $m \ge R(3,3,5)$, $v_1, v_2, \ldots, v_m$ között található egy háromszög, amelynek az összes éle piros, vagy egy háromszög, amelynek az összes éle kék, vagy pedig egy 5 csúcsú teljes részgráf, amelynek az összes éle zöld. Az első két esetben kész vagyunk, a harmadik esetben az 5 csúcsú teljes részgráfhoz amelynek az összes éle zöld, hozzávehetjük v-t, így kapunk egy 6 csúcsú teljes részgráfot amelynek az összes éle zöld, kész. 3 pont

2. A G gráfnak 60 csúcsa és 1500 éle van. Bizonyítsuk be, hogy tartalmaz 3, 4, 5, 6 és 7 hosszú kört.

Ha G tartalmaz egy teljes 7 csúcsú részgráfot, akkor ez a részgráf tartalmaz 3, 4, 5, 6 és 7 hosszú kört, tehát kész vagyunk. 3 pont

Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz teljes 7 csúcsú részgráfot. A Turán tetel alapján egy 60 csúcsú, K_7-et nem tartalmazó G gráfnak legfeljebb annyi éle van, mint a $T_{60,6}$ Turán gráfnak, és ha éppen ennyi éle van, akkor izomorf $T_{60,6}$-tal. 2 pont

A $T_{60,6}$ Turán gráfnak $100\binom{6}{2} = 1500$ éle van, éppen annyi, mint a mi G gráfunknak. Tehát G éppen a $T_{60,6}$ Turán gráf. 3 pont

A $T_{60,6}$ gráfban viszont nagyon könnyű találni 3, 4, 5, 6 és 7 hosszú köröket. A 3, 4, 5, 6 hosszú körökhöz pl egyszerűen veszunk egy-egy pontot különböző osztályokban. A 7 hosszú körhöz vegyük a $v_1, v_2, \ldots, v_7$ pontokat úgy, hogy mind különböző osztályban van, kivéve v_1 és v_3, ők ugyanabban az osztályban. 2 pont

3. Bizonyítsuk be, hogy minden k-ra létezik egy $M(k)$ a következő tulajdonsággal. Akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \ldots, M(k)$ számokat k színnel, léteznek olyan páronként különböző egyszínű, a, b, c számok, amelyekre $b - a = 10(c - a)$.

A Van der Waerden tétel szerint minden k-ra és n-re létezik egy (legkisebb) $N = N(k, n)$ szám azzal a tulajdonsággal, hogy akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \ldots, N$ számokat k színnel, lesz köztük egy egyszínű n hosszú számtani sorozat. Pontosabban: léteznek olyan $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq N$ számok, amelyek számtani sorozatot alkotnak és egyszínűek. 2 pont

Belátjuk, hogy $M(k) \leq N(k, 11)$. Színezzük ki az $1, 2, \ldots, N(k, 11)$ számokat k színnel. Ekkor a Van der Waerden tétel szerint léteznek olyan $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{11} \leq N(k, 11)$ számok, amelyek számtani sorozatot alkotnak és egyszínűek. 4 pont

Legyen d a számtani sorozatunk különbsége. Ekkor $a_2 = a_1 + d$, $a_{11} = a_1 + 10d$. Legyen $a_1 = a$, $a_2 = b$ és $a_{11} = c$, ekkor tehát $b - a = 10(c - a)$ és a, b, c egyszínűek. 4 pont

4. $\mathcal{F} \subseteq 2^{[2015]}$ egy 1000 és 1015 elemű halmazokból álló, metsző halmazrendszer. (A halmazrendszer semelyik két halmaza sem diszjunkt.) Mennyi $|\mathcal{F}|$ lehetséges legnagyobb értéke?

Egy 1000 elemű részhalmaznak a komplementere éppen egy 1015 elemű részhalmaz, ennek alapján az 1000 és 1015 elemű részhalmazok párba állíthatók. Mivel $\mathcal{F}$ egy metsző halmazrendszer, a komplementer párok közül legfeljebb egy lehet benne. 3 pont

Tehát $|\mathcal{F}| \leq \binom{2015}{1015} = \binom{2015}{1000}$. 2 pont

Ennyi viszont el is érhető, vegyük az összes 1015 elemű részhalmazt, bármely kettő metszi egymást, mert $2015 < 2 \cdot 1015$. 4 pont

Tehát $|\mathcal{F}|$ lehetséges legnagyobb értéke $\binom{2015}{1015} = \binom{2015}{1000}$. 1 pont

5. G egy páros gráf A és B osztályokkal. $|A| = 20$, $|B| = 18$. Tetszőleges két A-beli csúcsnak pontosan egy közös szomszédja van B-ben.

Bizonyítsuk be, hogy van legalább két olyan A-beli csúcs, amelyeknek pontosan egy-egy B-beli szomszédja van.

Legyenek A elemei $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$. Minden i-re $(1 \leq i \leq 20)$ legyen $B_i \subseteq B$ a_i szomszédainak a halmaza. A feltétel szerint minden $i \neq j$ esetén $|B_i \cap B_j| = 1$, mert a_i-nek és a_j-nek pontosan egy közös szomszédja van B-ben. 3 pont

Tegyük fel, hogy a B_i halmazok mind különbözőek. Ekkor a 18 elemű B halmaznak lenne 20 részhalmaza azzal a tulajdonsággal, hogy bármely kettő metszete pontosan 1 elemű. Csakhogy ez ellentmond a Fisher egyenlőtlenségnek, amely szerint legfeljebb 18 ilyen részhalmaz lehet. 4 pont

Tehát van ket részhalmaz, mondjuk B_1 és B_2, amelyek egyenlőek, vagyis $B_1 = B_2$. De ekkor $B_1 = B_2 = B_1 \cap B_2$ és a feltétel szerint $|B_1 \cap B_2| = 1$, ezért $|B_1| = |B_2| = 1$, vagyis a_1-nek és a_2-nek pontosan egy-egy B-beli szomszédja van. (Ráadásul ugyanaz!) 3 pont

6. Az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszerről tudjuk, hogy ha $A, B \in \mathcal{F}$, és $A \subset B$, akkor $|A|$ páros, $|B|$ pedig páratlan. Bizonyítsuk be, hogy

$$|\mathcal{F}| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Legyen

$$\mathcal{F}_1 = \{\ A \in \mathcal{F} \mid |A| \text{ páros}\}$$

és legyen

$$\mathcal{F}_2 = \{\ A \in \mathcal{F} \mid |A| \text{ páratlan}\}.$$

4 pont

Tegyük fel, hogy $A, A' \in \mathcal{F}_1$ és $A \subset A'$. Ekkor a feltétel szerint $|A'|$ páratlan, viszont az $\mathcal{F}_1$-hez tartozó halmazok mind páros méretűek. Hasonlóan, ha $A, A' \in \mathcal{F}_2$ és $A \subset A'$. Ekkor a feltétel szerint $|A|$ páros, viszont az $\mathcal{F}_1$-hez tartozó halmazok mind páratlan méretűek. Ezért $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ is Sperner rendszert alkot. 4 pont

Ezért a Sperner tétel szerint

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

2 pont