Kombinatorika és gráfelmélet II

1. **Pót**ZH, 2015. május 12. 12.15-13.45, H 405.

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel llapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének vgiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóban szereplő pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Egy összefüggő G síkbarajzolt gráfnak 100 csúcsa van. Duálisa, G^*, egyszerű, páros gráf. Bizonyítsuk be, hogy G–nek legalább 200 éle van.

G-nek nem lehet izolált pontja, mert összefüggő. 2 pont

1 fokú pontja sem lehet, mert annak G^*-ban egy hurokél felelne meg, de G^* egyszerű gráf. 2 pont

2 fokú pontja sem lehet, mert annak G^*-ban két párhuzamos él felelne meg, de G^* egyszerű gráf. 2 pont

3 fokú pontja sem lehet, mert annak G^*-ban egy háromszög (három hosszú kör) felelne meg, de G^* páros gráf. 2 pont

Tehát G-ben a minimális fokszám 4. Ezért, ha e jelöli az élek számát, $d_1, \ldots, d_{100}$ a fokszámokat, akkor $2e = \sum_{i=1}^{100} d_i \geq \sum_{i=1}^{100} 4 = 400$, tehát $e \geq 200$. 2 pont

2. Tetszőleges G gráfra legyen $3G$ a következő gráf. Vesszük G három diszjunkt példányát, és az egymásnak megfelelő csúcsokat a különböző példányokban összekötjük.

Bizonyítsuk be, hogy ha G síkgráf, akkor a $3G$ gráf listaszínezési száma legfeljebb 7. (Vagyis $ch(3G) \leq 7$.)

Legyen $3G$-ben G három példánya G_1, G_2, G_3. Tegyük fel, hogy $3G$ minden v csúcsához tartozik egy $L(v)$ 7 elemű színlista. 1 pont

Thomassen tétele szerint minden síkgráf 5-listaszínezhető. 1 pont

Tehát színezzük ki először G_1-et az adott listákról. 2 pont

Tekintsük most G_2 illetve G_3 tetszőleges csúcsát, v-t. Az ennek megfelelő csúcs G_1-ben u. Ha szerepel az $L(v)$ listán u színe, akkor húzzuk ki! Végezzük ezt el G_2 és G_3 minden csúcsára. Ekkor G_2 és G_3 minden v csúcsához tartozik egy $L'(v)$, legalább 6 hosszú színlista. Thomassen tétele szerint ezekről a litákról ki tudjuk színezni G_2-t. Ugyhogy színezzük is ki. 3 pont

Most legyen G_3 tetszőleges csúcsa v. Az ennek megfelelő csúcs G_2-ben u. Ha szerepel az $L'(v)$ listán u színe, akkor húzzuk ki! Végezzük ezt el G_3 minden csúcsára. Ekkor G_3 minden v csúcsához tartozik egy $L'(v)$, legalább 5 hosszú színlista. Thomassen tétele szerint ezekről a litákról ki tudjuk színezni G_3-t. 2 pont

Ezzel kiszíneztük $3G$-t az adott listákról. 1 pont

3. Tetszőleges n csúcsú G síkbarajzolt gráfra legyenek $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a csúcsok fokszámai, $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek F_1, F_2, …, F_t a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról F_i–t határolja, akkor kétszer számoljuk). Határozzuk meg az

$$s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| - 5) + \sum_{i=1}^{n} d_i$$

mennyiség maximumát, ha G tetszőleges $n = 100$ csúcsú, egyszerű síkbarajzolt gráf lehet.

Legyen e G éleinek a száma. $s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| - 5) + \sum_{i=1}^{n} d_i = 2e - 5t + 2e = 4e - 5t$. 2 pont

Ha G nem összefüggő és behúzunk egy élt G-be, amely két különböző komponenst köt össze, akkor e 1-gyel nő, t pedig változatlan marad. Tehát $s(G)$ néggyel nő. 2 pont

Ha elhagyjuk G-ből egy kör egyik élét, akkor akkor e is és t is 1-gyel csökken, tehát $s(G)$ 1-gyel nő. 2 pont

Tehát $s(G)$ akkor maximális, ha G összefüggő, de nincs benne kör. Vagyis G egy 100 csúcsú fa. 2 pont

Ekkor $s(G) = 4e - 5t = 4 \cdot 99 - 5 \cdot 1 = 391$. 2 pont

4. A G és H összefüggő gráfok 100 csúcsúak, mindkettőben pontosan egy kör van, és ez az egyetlen kör mindkét gráfban 4 hosszú. Bizonyítsuk be, hogy G és H gyengén izomorfak.

Hagyjuk el G egyik olyan élét, amely a 4 hosszú körében van. A kapott G' gráf összefüggő, de nincs benne kör, vagyis fa. 3 pont

Ezért 99 éle van. Ebből következik, hogy G-nek pontosan 100 éle van. 2 pont

Pontosan ugyanígy bizonyíthatjuk, hogy H-nak is pontosan 100 éle van. 1 pont

Legyenek $e_1, e_2, \ldots, e_{100}$ G élei, és tegyük fel, hogy e_1, e_2, e_3, e_4 alkotják a 4 hosszú kört. Ekkor a többi 96 él elvágó él. Hasonlóan, legyenek $f_1, f_2, \ldots, f_{100}$ H élei, és tegyük fel, hogy f_1, f_2, f_3, f_4 alkotják a 4 hosszú kört. Ekkor a többi 96 él itt is elvágó él. 2 pont

Tehát az $e_i \longleftrightarrow f_i$, $i = 1, 2, \ldots, 100$ egy bijekciót ad G és H élei között, amely kör- és vágástartó. Ezért G és H gyengén izomorfak. 2 pont

5. G olyan gráf, hogy négy élét elvéve síkgráfot kapunk. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \le 8$.

Legyen u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4 G négy éle. Hagyjuk el ezeket az éleket G-ből, legyen a kapott gráf G'. 2 pont

A G' gráf síkgráf, tehát a Négyszíntétel miatt G' csúcsai kiszínezhetők négy színnel. 3 pont

Színezzük át a v_1, v_2, v_3, v_4 csúcsokat négy új színnel és tegyük vissza az u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4 G éleket. 3 pont

Ezzel G érvényes színezését kaptuk 8 színnel. 2 pont

6. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V, E_1)$ és $G_2(V, E_2)$ perfektek, $|V| = 251$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy teljes hatost, vagy egy üres tizenegyest. (Hat pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy tizenegyet, amelyek közül semelyik kettő sincs összekötve.)

Ha $\chi(G_1) \ge 6$, akkor, mivel G_1 perfekt, $\chi(G_1) = \omega(G_1)$, vagyis G_1 tartalmaz egy teljes hatost, ezért G is tartalmaz egy teljes hatost, tehát kész vagyunk. 2 pont

Tegyük fel, hogy $\chi(G_1) \le 5$. Színezzük ki G_1-et 5 színnel. Valamelyik színosztály legalább 51 csúcsot fog tartalmazni, legyen ezen csúcsok halmaza V'. Természetesen V' egy független halmaz G_1-ben. 3 pont

Legyen $G_2' = G_2(V')$, G_2 V' által feszített részgráfja. Nyilván G_2' is perfekt, tehát $\chi(G_2') = \omega(G_2')$. 2 pont

Ha $\chi(G_2') = \omega(G_2') \ge 6$, akkor G_2' tartalmaz egy teljes hat csúcsú részgráfot, ami nyilvan a G gráfban is egy teljes hatos tehát kész vagyunk. 2 pont

Ha pedig $\chi(G_2') = \omega(G_2') \le 5$, akkor G_2' kiszínezhető legfeljebb öt színnel, tehát az egyik színosztály mérete legalább $\lceil 51/5 \rceil = 11$, és ez egy független halmazt alkot G_2'-ben, így G_2-ben is, viszont V' választása miatt G_1-ben is. Tehát ez egy üres tizenegyes G-ben. 3 pont