Kombinatorika és gráfelmélet II

1. ZH, 2015. március 16. 10.15-11.45, E 505.

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel llapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének vgiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóban szereplő pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Egy összefüggő G síkbarajzolt gráfnak 200 csúcsa és 395 éle van. G–ben minden csúcs foka páros. Bizonyítsuk be, hogy G duálisa nem egyszerű gráf.

Elég bebizonyítani, hogy G-nek van másodfokú csúcsa, mert ennek G duálisában két párhuzamos él felel meg. Tegyük fel, hogy G-nek nincs másodfokú csúcsa. Legyenek a fokszámok $d_1, d_2, \ldots, d_{200}$, az élek száma $e = 395$. 3 pont

Mivel G összefüggő, nincs 0-ad fokú csúcs (izolált pont) sem. 1 pont

Mivel minden csúcs foka páros, ebből az következik, hogy minden csúcs foka $d_i \geq 4$. 2 pont

Ekkor viszont $790 = 2e = \sum_{i=1}^{200} d_i \geq \sum_{i=1}^{200} 4 = 800$, ami ellentmondás. 3 pont

Tehát G-nek van másodfokú csúcsa, ekkor viszont duálisa nem egyszerű gráf. 1 pont

2. Tegyük fel, hogy G egy egyszerű, legalább 7 csúcsú gráf és bármelyik két csúcsát (és a rájuk illeszkedő éleket) elhagyva síkgráfot kapunk. Bizonyítsuk be, hogy G kromatikus száma $\chi(G) \leq 5$.

G biztos, hogy nem egy teljes gráf. Ha az lenne, akkor tartalmazna egy teljes 7 csúcsú gráfot, ebből pedig két pontot elhagyva még mindig marad egy K_5, ami nem síkgráf. Ez elentmondana a feltevésnek. Ezek szerint van G-nek két nem szomszédos csúcsa, u és v. 4 pont

Színezzük ki u-t és v-t egyaránt az 1-es színnel. 2 pont

$G \setminus \{u, v\}$ a feltétel szerint síkgráf, tehát a Négyszíntétel szerint kiszínezhető a 2, 3, 4, 5, színekkel. 3 pont

Ezzel kiszíneztük G-t 5 színnel. 1 pont

3. Tetszőleges n csúcsú G síkbarajzolt gráfra legyenek $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a csúcsok fokszámai, $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek $F_1, F_2, \ldots, F_t$ a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról F_i–t határolja, akkor kétszer számoljuk). Határozzuk meg az

$$s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| - 1) + \sum_{i=1}^{n} d_i$$

mennyiség maximumát és minimumát, ha G tetszőleges $n = 100$ csúcsú, egyszerű síkbarajzolt gráf lehet.

Legyen e G éleinek a száma. $s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| - 1) + \sum_{i=1}^{n} d_i = 2e - t + 2e = 4e - t$. 2 pont

Ha behúzunk egy élt G-be, akkor $4e$ 4-gyel nő, t pedig vagy 1-gyel nő, vagy változatlan marad. Tehát egy él hozzáadásával $s(G)$ legalább hárommal nő. 3 pont

Ezért $s(G)$ akkor maximális, ha G egy maximális síkgráf (háromszögelés), ekkor $e = 3 \cdot 100 - 6 = 294$, $t = 2 \cdot 100 - 4 = 196$ (ezt tanultuk, könnyen kijön az Euler formulából) ekkor $s(G) = 4 \cdot 294 - 196 = 980$. 3 pont

Végül $s(G)$ akkor minimális, ha G-nek egyáltalán nincs éle, ekkor $e = 0$, $t = 1$, $s(G) = 4 \cdot 0 - 1 = -1$. 2 pont

4. A G és H gráfok 100 csúcsúak, mindkettőnek 100 éle van, mindkettő összefüggő és mindkettő tartalmaz háromszöget (három hosszú kört). Bizonyítsuk be, hogy G és H gyengén izomorfak.

Legyenek $e_1, e_2, \ldots, e_{100}$ G élei, és tegyük fel, hogy e_1, e_2, e_3 háromszöget alkotnak. Hagyjuk el G-ből valamelyiket e három él közül, vagyis tekintsük a $G' = G \setminus e_i$ gráfot, ahol $i = 1, 2$, vagy 3. 2 pont

G' továbbra is összefüggő, 100 csúcsa és 99 éle van. Tehát G' egy fa. 2 pont

Vagyis G PONTOSAN egy háromszöget tartalmaz, ennek bármelyik élét elhagyva egy fát kapunk. Ezek szerint e_1, e_2, e_3 alkotják az egyetlen kört, a többi 97 él elvágó él. 2 pont

Hasonlóan, ha $f_1, f_2, \ldots, f_{100}$ H élei, ahol f_1, f_2, f_3 háromszöget alkotnak, akkor f_1, f_2, f_3 alkotják az egyetlen kört H-ban, a többi 97 él elvágó él. 2 pont

Tehát az $e_i \longleftrightarrow f_i$, $i = 1, 2, \ldots, 100$ egy bijekciót ad G és H élei között, amely kör- és vágástartó. Ezért G és H gyengén izomorfak. 2 pont

5. Tetszőleges G gráfra legyen $2G$ a következő gráf. Vesszük G két diszjunkt példányát, és az egymásnak megfelelő csúcsokat a két példányban összekötjük.

Bizonyítsuk be, hogy ha G síkgráf, akkor a $2G$ gráf listaszínezési száma legfeljebb 7, vagyis $ch(2G) \leq 7$. (Valójában $ch(2G) \leq 6$ is igaz.)

1. megoldás: Azt fogjuk belátni, hogy $ch(2G) \leq 6$. Legyen $2G$-ben G egyik példánya G_1, másik példánya G_2. Tegyük fel, hogy $2G$ minden v csúcsához tartozik egy $L(v)$ 6 elemű színlista. 1 pont

Thomassen tétele szerint minden síkgráf 5-listaszínezhető. 2 pont

Tehát színezzük ki először G_1-et az adott listákról. 2 pont

Tekintsük most G_2 tetszőleges csúcsát, v-t. Ennek megfelelő csúcs G_1-ben u. Ha szerepel az $L(v)$ listán u színe, akkor húzzuk ki! Végezzük ezt el G_2 minden csúcsára. Ekkor G_2 minden v csúcsához tartozik egy $L'(v)$, legalább 5 hosszú színlista. Thomassen tétele szerint ezekről a litákról ki tudjuk színezni G_2-t. Ezzel kiszíneztük $2G$-t az adott listákról. 5 pont

2. megoldás: Indukcióval bizonyítunk n-re, G csúcsainak a számára. Ha $n \leq 3$ akkor az állítás triviális. 2 pont

Legyen most G adott, $n \geq 4$ csúcsú és tegyük fel, hogy kevesebb csúcsú gráfokra már beláttuk az állítást. Legyen $2G$-ben G egyik példánya G_1, másik példánya G_2. Tegyük fel, hogy $2G$ minden v csúcsához tartozik egy $L(v)$ 7 elemű színlista. 1 pont

Tudjuk, hogy minden síkgráfnak van legfeljebb ötödfokú csúcsa. Legyen tehát G-ben v foka legfeljebb 5, a v-nek megfelelő csúcsok G_1-ben illetve G_2-ben v_1 illetve v_2. 2 pont

Az indukciós feltevés szerint a $2G \setminus \{v_1, v_2\} = 2(G \setminus \{v\})$ gráfot ki tudjuk színezni az adott listákról, tehát színezzük is ki! 2 pont

Vegyük ehhez hozzá v_1-et. Ennek legfeljebb csak öt szomszédja van a $2G \setminus \{v_1, v_2\}$ gráfban, tehát ki tudjuk színezni mert 7 hosszú a listája. Most vegyük be v_2-t, ennek is legfeljebb csak öt szomszédja van a $2G \setminus \{v_1, v_2\}$ gráfban, plusz még v_1 is a szomszédja. De így is ki tudjuk színezni mert 7 hosszú a listája. Ezzel bebizonyítottuk az állítást. 3 pont

6. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V, E_1)$ perfekt, $G_2(V, E_2)$ páros gráf, és $|V| = 193$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy teljes hetest, vagy egy üres tizenhetest. (Hét pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy tizenhetet, amelyek közül semelyik kettő sincs összekötve.)

Mivel G_2 páros, az egyik osztálya legalább $\lceil 193/2 \rceil = 97$ csúcsú, legyen ez V', ez egy független halmaz G_2-ben. 3 pont

Legyen $G_1' = G_1(V')$, G_1 V' által feszített részgráfja. Nyilván G_1' is perfekt, tehát $\chi(G_1') = \omega(G_1')$. 2 pont

Ha $\chi(G_1') = \omega(G_1') \geq 7$, akkor G_1' tartalmaz egy teljes hét csúcsú részgráfot, ami nyilvan a G gráfban is egy teljes hetes, tehát kész vagyunk. 2 pont

Ha pedig $\chi(G_1') = \omega(G_1') \leq 6$, akkor G_1' kiszínezhető legfeljebb hat színnel, tehát az egyik színosztály mérete legalább $\lceil 97/6 \rceil = 17$, és ez egy független halmazt alkot G_1'-ban, így G_1-ben is, viszont V' választása miatt G_2-ben is. Tehát ez egy üres tizenhetes G-ben. 3 pont