

## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

9. gyakorlat, 2015. április 7.

### Turán-tétel, további extrémális gráfelméleti feladatok

Tetszőleges  $H$  gráfra  $ex(n, H)$  jelöli az  $n$  csúcsú,  $H$ -t részgráfként nem tartalmazó gráfok maximális élszámát,  $Ex(n, H)$  pedig az  $n$  csúcsú,  $H$ -t részgráfként nem tartalmazó,  $ex(n, H)$  élű gráfok halmazát (izomorfia erejéig).

Legyen  $n, r \geq 1$ . Az  $n$  csúcsú,  $r$  osztályú  $T(n, r)$  **Turán gráfnak**  $n$  csúcsa van,  $r$  osztályba osztva a lehető legegyszerűbben: ha  $n = ar + b$ ,  $r > b \geq 0$ , akkor  $b$  osztályban  $\lceil n/r \rceil$  csúcs van,  $r - b$  osztályban pedig  $\lfloor n/r \rfloor$  darab. Bármely két, különböző osztályhoz tartozó csúcs össze van kötve, az azonos osztályban levők nem.

Tetszőleges  $G$  gráfra legyen  $|E(G)|$   $G$  éleinek a száma.

**Turán tétel (1941).**  $ex(n, K_{r+1}) = |E(T(n, r))|$ . Ha pedig  $G$  egy  $n$  csúcsú gráf ami nem tartalmaz  $K_{r+1}$ -et részgráfként és  $|E(G)| = |E(T(n, r))|$ , akkor  $G$  izomorf a  $T(n, r)$  Turán gráffal, azaz  $Ex(n, K_{r+1}) = T(n, r)$ .

**Erdős, Kővári, Sós, Turán tétel (1954)** Legyen  $r \geq s \geq 2$ . Egy  $n$  csúcsú gráfnak, amely nem tartalmaz  $K_{r,s}$ -t részgráfként legfeljebb  $c_{r,s} n^{2-1/s}$  éle van, valamilyen  $c_{r,s}$  konstansra.

1. Legfeljebb hány éle lehet egy  $n$  csúcsú gráfnak, ami legfeljebb egy  $K_{r+1}$ -et tartalmaz részgráfként?
2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű, összefüggő gráfban nincs háromszög, akkor  $|E(G)| \leq \alpha(G)\tau(G)$ . Mikor áll egyenlőség?
3. Legyenek  $v_1, v_2, \dots, v_n$  síkbeli vektorok,  $|v_i| \geq 1$ . Legalább hány párba lesz  $|v_i + v_j| \geq 1$ ?
4. Adott a síkon  $n$ , nem feltétlenül különböző pont. Legfeljebb mennyi lehet az ezek közül kiválasztható egységnyi távolságra levő pontpárok száma?
5. a. Mutassuk meg, hogy sík  $n$  különböző pontja és  $n$  különböző egyenese között legfeljebb  $c \cdot n^{\frac{3}{2}}$  illeszkedés lehet, ahol  $c$  alkalmas konstans. (Illeszkedés: egy (pont, egyenes) pár, ahol a pont illeszkedik az egyenesre.)  
b. Mutassuk meg, hogy sík  $n$  különböző pontja és  $n$  különböző köre között legfeljebb  $c \cdot n^{\frac{3}{2}}$  illeszkedés lehet, ahol  $c$  alkalmas konstans. (Illeszkedés: egy (pont, kör) pár, ahol a pont illeszkedik a körre.)
6. Mutassuk meg, hogy sík  $n$  különböző pontja legfeljebb  $c \cdot n^{\frac{3}{2}}$  egységtávolságot határozhat meg, ahol  $c$  alkalmas konstans.
7. Legfeljebb hány éle lehet egy  $n$  csúcsú gráfnak, ha élei kiszínezhetők úgy két színnel, hogy ne keletkezzen egyszínű háromszög?
8. Egy  $n$  tagú társaságban eredetileg senki nem ismer senkit. Minimálisan hány bemutatással (egy bemutatás mindig pontosan két ember egymásnak való bemutatását jelenti) érhetjük el, hogy teljesüljenek a következő feltételek: 1. Bármely három ember között van kettő, akik ismerik egymást (tehát be lettek mutatva); 2. Bárki bárkinek (olyannak is, akit nem ismer) küldhet üzenetet úgy, hogy az üzenetet egymást ismerő (tehát egymásnak bemutatott) emberek adják tovább egymásnak, s az végül célba jut.
9. Maximálisan és minimálisan hány éle lehet egy 10 kromatikus számú, 100 csúcsú gráfnak?
10. Legyen adott a térben 40 tetszőleges pont. Bizonyítsuk be, hogy ezek közül kiválasztható éppen egységnyi távolságra levő pontpárok száma legfeljebb 600.
11. Legyen  $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ , ahol minden  $p_i > 1$  és  $p_i$  prímszám. Hány osztóját választhatjuk ki  $n$ -nek úgy, hogy semelyik két kiválasztott osztó se legyen relatív prím?

### Házi feladat

1. Legyen  $H$  egy négy csúcsú, négy élű gráf, amelyben három él háromszöget alkot. Határozzuk meg  $ex(n, H)$ -t minden  $n$ -re.