

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

6. gyakorlat, 2015. március 17.

Ramsey elmélet bevezetés

Ramsey tétel (gráfokra, két színnel): Minden $k, l > 0$ számokhoz van olyan (legkisebb) $R = R(k, l)$ szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes gráf éleit tetszőlegesen kiszínezve pirossal és kézzel, vagy van egy k csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle piros, vagy egy l csúcsú, amelynek minden éle kék. Erdős-Szekeres: $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Ramsey tétel (gráfokra, r színnel): Minden $r > 0, k_1, k_2, \dots, k_r > 0$ számokhoz van olyan (legkisebb) $R = R(k_1, k_2, \dots, k_r)$ szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes gráf éleit tetszőlegesen kiszínezve az $1, 2, \dots, r$ színekkel, valamilyen $1 \leq i \leq r$ számra vagy van egy k_i csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle i színű.

- Mutassuk meg, hogy minden legalább 6 csúcsú G gráfra $\omega(G) \geq 3$ vagy $\alpha(G) \geq 3$.
 - Mutassuk meg, hogy minden legalább 10 csúcsú G gráfra $\omega(G) \geq 4$ vagy $\alpha(G) \geq 3$.
- Bizonyítsuk be, hogy $R(3, 3, 3) \leq 17$ és azt is, hogy $R(3, 4) = 9$.
- Egy teljes gráf éleit kiszíneztük pirossal és kézzel. Bizonyítsuk be, hogy van egy feszítőfa, amelynek minden éle ugyanolyan színű.
 - Igaz az állítás feszítőfa helyett Hamilton úttal is?
- A sík pontjait kiszínezte valaki pirosra, fehérre és zöldre. Igazoljuk, hogy mindenképpen keletkezett egyszínű, egymástól egységnyi távolságban levő pontpár!
- Igazoljuk, hogy a ki lehet színezni a sík pontjait 9 színnel úgy, hogy ne legyen egyszínű, egymástól egységnyi távolságban levő pontpár! Igazoljuk az állítást 7 színnel is.
- Tegyük fel, hogy a sík pontjait kiszínezte valaki pirosra és zöldre úgy, hogy mindkét színt használta. Mutassuk meg, hogy mindenképpen keletkezett egymástól egységnyi távolságban levő pontpár, melynek egyik tagja piros, a másik zöld! Igaz-e, hogy a sík ilyen kiszínezésekor biztosan található olyan egységoldalú szabályos háromszög, aminek csúcsai egyszínűek?
- (Végtelen Ramsey tétel) Egy végtelen sok csúcsú teljes gráf éleit kiszíneztük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy van egy végtelen sok csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle ugyanolyan színű.
- Legyen a_n a természetes számok tetszőleges szigorúan növekvő végtelen sorozata. Mutassuk meg, hogy található akármilyen hosszú részsorozat, amelyben bármely két elem relatív prím, vagy semelyik két elem sem relatív prím.
- Kiszínezhető-e az egész számok két színnel úgy, hogy ne létezzon egyszínű végtelen számtani sorozat? Hát mértani?
- Mutassunk olyan $(k-1)^2$ pontú gráfot, amelyben nincs sem teljes k -as sem üres k -as!

Házi feladat

- A Facebook Kombi2 Royal Club $s(s+1)/2$ tagjára az teljesül, hogy bármely hármat kiválasztva, van ezek között legalább kettő, akik ismerik egymást. Mutassuk meg, hogy biztosan van s olyan Kombi2 Royal Club tag, akik egymást mindannyian ismerik!
- Tegyük fel, hogy a sík pontjait kiszínezte valaki pirosra és zöldre úgy, hogy nincs két zöld pont egymástól egységtávolságra. Legyen T egy tetszőleges háromszög. Bizonyítsuk be, hogy van egy T -vel egybevágó háromszög, amelynek mind a három csúcsa piros.