Kombinatorika és gráfelmélet 2.

5. gyakorlat, 2015. március 10.

Összehasonlítás gráfok, súlyátrendező módszer, ismétlés

1. Van egy csomó kartondobozunk, melyek a G gráf csúcsainak felelnek meg. Két csúcs akkor van összekötve, ha a megfelelő dobozok közül egyik sem rakható a másikba. Igazoljuk, hogy G perfekt. Mi a helyzet nejlonzacskókkal?

2. Adott a síkon néhány körvonal, ezekhez rendeljük a következő G gráfot. G csúcsai feleljenek meg egy-egy megadott körvonalnak, és kettő akkor legyen összekötve, ha a két megfelelő körvonal egyike teljesen a másik belsejében halad. Bizonyítsuk be, hogy az így megadott G gráf perfekt.

3. Legyen $G(V,E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V,E_1)$ és $G_2(V,E_2)$ perfektek, $|V| = 65$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy teljes ötöst vagy egy üres ötöst. (Öt pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy semelyik kettő sincs.)

4. Adott 50 egyforma hosszú, különböző intervallum egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy (a) vagy van olyan pont amelyet legalább 8 intervallum tartalmaz, vagy pedig van 8 páronként diszjunkt intervallum. (b) Ugyanez, csak 7-tel és 9-cel.

5. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek F_1, F_2, …, F_t a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Határozzuk meg a
$$s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| - 1)$$
mennyiség maximumát ha G tetszőleges 10 csúcsú síkbarajzolt gráf lehet.

6. Tetszőleges n csúcsú G síkbarajzolt gráfra legyenek $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a csúcsok fokszámai, $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek F_1, F_2, …, F_t a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Legyen
$$s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| + a) + \sum_{i=1}^{n} (d_i + a)\,.$$
Határozzuk meg a értékét úgy, hogy $s(G)$ értéke ugyanannyi legyen minden, legalább 3 csúcsú, egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt G gráfra.

1. ZH, 2012. március 12. 10.15-11.45, J202

1. Egy összefüggő G síkbarajzolt gráfnak 200 csúcsa és 300 éle van. Tudjuk, hogy a duálisa egyszerű. Bizonyítsuk be, hogy G–ben a maximális fokszám 3.

2. G egy egyszerű gráf, e egy éle, és tudjuk, hogy ha G–ből elvesszük az e élt, akkor síkgráfot kapunk. Bizonyítsuk be, hogy G 6–listaszínezhető. (Vagyis $ch(G) \leq 6$.)

3. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $e(G) - n(G) - 3t(G)$ mennyiség maximumát. (Ha G tetszőleges síkbarajzolt gráf lehet.)

5. Legyen G egy páros, síkbarajzolt gráf. Képezzük a G' gráfot a következő módon. Vegyünk fel egy-egy csúcsot G minden tartományában, és kössük össze a különböző szomszédos tartományoknak megfelelő csúcsokat. Ezenkívül kössünk össze minden tartománynak megfelelő csúcsot G azon csúcsaival, amelyek a megfelelő tartomány határán vannak. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G') \leq 6$.

Mutassunk olyan G páros, nem feltétlenül egyszerű, síkbarajzolt gráfot, amelyre a fenti módon képezett G' gráf kromatikus száma 5.

6. Legyen $G(V,E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V,E_1)$ perfekt, $G_2(V,E_2)$ páros gráf, és $|V| = 163$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy teljes tizest, vagy egy üres tizest. (Tíz pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy semelyik kettő.)