

## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

4. gyakorlat, 2015. március 3.

### Listaszínezés, súlyáttrendező módszer bevezetés

1. Határozzuk meg  $ch(K_{2,4})$  értékét. ( $K_{2,4}$  a két színosztályában 2 és 4 pontot tartalmazó teljes páros gráfot jelöli.)
2. Igaz-e, hogy ha  $\chi(G) = ch(G)$ , akkor  $\chi(\overline{G}) = ch(\overline{G})$ ?
3. Igaz-e, hogy ha a  $G$  gráf minden csúcsához adott egy legalább  $ch(G)$  méretű színlista, akkor  $G$  alkalmas csúcssorrend esetén mohón kiszínezhető úgy, hogy minden csúcsnak a listáján szereplő legkisebb olyan színt választjuk, ami nem azonos az eddig megszínezett, az adott csúccsal szomszédos csúcsok valamelyikének színével?
4. Legyen  $K_{2,2,\dots,2}$  az a gráf, aminek komplementere  $n$  diszjunkt él. Határozzuk meg a  $ch(K_{2,2,\dots,2})$  listaszínezési számot.
5. Mutassunk olyan gráfot, ami egyetlen gráfnak sem élgráfja.
6. Mutassuk meg, hogy ha  $G$  élgráf, akkor  $ch(G) \leq 2\chi(G) - 1$ .
7. Igazoljuk, hogy ha a véges, egyszerű  $G$  gráf minden  $v$  csúcsára  $|L(v)| > d(v)$  teljesül, akkor  $G$   $L$ -listaszínezhető. ( $d(v)$  jelöli a  $v$  csúcs fokszámát.)
8. Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $T$  legalább két pontú fára  $ch(T) = 2$ .
9. Jelölje  $\chi''(G)$  a  $G$  gráf teljes kromatikus számát, azaz a minimális színszámot, ami szükséges érvényes teljes színezéshez úgy, hogy a csúcsokat és az éleket is színezzük, azzal a feltétellel, hogy érintkező elemek (összekötött csúcsok, közös csúccsal rendelkező élek, egy él és annak egy végpontja) nem lehetnek azonos színűek. Igazoljuk, hogy a listaszínezési sejtésből következne, hogy  $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 3$  minden  $G$  gráfra.
10. (2013, 1. ZH) Tetszőleges 100 csúcsú  $G$  síkbarajzolt gráfra legyenek  $d_1, d_2, \dots, d_{100}$  a csúcsok fokszámai,  $t = t(G)$  a tartományok száma, és legyenek  $F_1, F_2, \dots, F_t$  a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is).  $|F_i|$  jelentse az  $F_i$  tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Határozzuk meg az

$$s(G) = \sum_{i=1}^t (|F_i| - 2) - \sum_{i=1}^{100} d_i$$

mennyiség maximumát és minimumát, ha  $G$  tetszőleges egyszerű 100 csúcsú összefüggő síkbarajzolt gráf lehet.

11. (2013, 1. PótZH) Tetszőleges  $n$  csúcsú  $G$  síkbarajzolt gráfra legyenek  $d_1, d_2, \dots, d_n$  a csúcsok fokszámai,  $t = t(G)$  a tartományok száma, és legyenek  $F_1, F_2, \dots, F_t$  a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is).  $|F_i|$  jelentse az  $F_i$  tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Legyen

$$s(G) = \sum_{i=1}^t (|F_i| + a) + \sum_{i=1}^n (d_i + b).$$

Határozzuk meg  $a$  és  $b$  értékét úgy, hogy  $s(G)$  értéke ugyanannyi legyen minden, legalább 3 csúcsú, egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt  $G$  gráfra.

### Házi feladat

Bizonyítsuk be, hogy  $ch(K_{n,n^n}) = n + 1$  minden pozitív egész  $n$ -re. ( $K_{n,n^n}$  a két színosztályában  $n$  és  $n^n$  pontot tartalmazó teljes páros gráfot jelöli.)