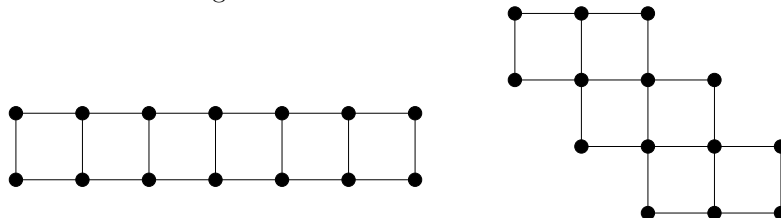


Kombinatorika és gráfelmélet 2.

3. gyakorlat, 2015. február 24.

Dualitás, síkgráfok színezése

1. Bizonyítsuk be, hogy egy síkbarajzolható gráf tartományai akkor és csak akkor színezhethők ki két színnel, ha minden pont foka páros.
2. Gyengén izomorfak-e az itt látható gráfok?



3. Bizonyítsuk be, két fa pontosan akkor gyengén izomorf, ha ugyanannyi pontjuk van.
4. Mutassunk minden $n > 3$ -ra olyan n csúcsú síkbarajzolt gráfot, amely izomorf a duálisával.
5. Mutassuk meg, hogy tetszőleges egyszerű síkgráf élhalmaza előáll, mint 2 páros gráf élhalmazának uniója.
6. A G és a G^* véges egyszerű gráfok egymás duálisai. Bizonyítsuk be, hogy $\min\{\delta(G), \delta(G^*)\} = 3$. δ a legkisebb fokszám.
7. Legyen G olyan $n \geq 3$ csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, melyben az élek száma $3n - 6$. Mennyi G duálisának maximális fokszáma?
8. Jelölje $F_n = K_{n,n} - nK_2$ azt a páros gráfot, melyet úgy kapunk a $K_{n,n}$ teljes páros gráfból, hogy elhagyjuk belőle egy teljes párosítás éleit. Milyen n -ek esetén lesz F_n síkbarajzolható?
9. Egy gráfot *külsíkgráfnak* nevezünk, ha lerajzolható a síkba az élek kereszteződése nélkül úgy, hogy minden csúcs rajta van az egyik (például a külső) tartomány határán. (a) Legfeljebb hány éle lehet egy külsíkgráfnak? (b) Adjunk a Kuratowski-tételhez hasonló karakterizációt a külsíkgráfokra, azaz adjunk meg egy olyan (véges) \mathcal{F} gráfalmazt, hogy igaz legyen a következő: egy gráf pontosan akkor külsíkgráf, ha nem tartalmaz \mathcal{F} -beli gráffal topologikusan izomorf részgráfot! (c) Legfeljebb mennyi a kromatikus száma egy külsíkgráfnak?
10. Tetszőleges összefüggő, síkbarajzolható G gráfhoz mutassunk olyan, önmagával duális G' síkbarajzolt gráfot, aminek G feszített részgráfja.
11. Legfeljebb mennyi a perfekt síkgráfok kromatikus száma?

Házi feladat.

1. Tegyük fel, hogy G síkbarajzolt gráf, G minden lapja háromszög és G^* minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van G -nek?
2. Bizonyítsuk be, hogy minden (legalább három csúcsú) egyszerű síkgráfnak van legalább három olyan csúcsa, amelyeknek a foka kevesebb mint hat.