

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

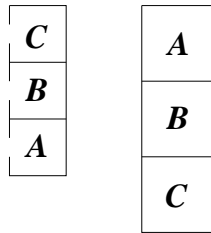
2. gyakorlat, 2015. február 17.

Kuratowski tétel, Fáry-Wagner tétel, dualitás

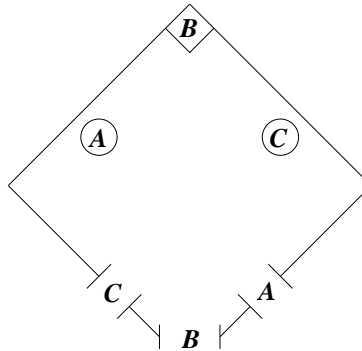
1. a (*). Mézga Aladár (A), Doktor Bubó (B) és Csőrmester (C) egy sorházban laknak, egymás mellett, a garázsaik egy másik épületben vannak, ugyancsak egymás mellett. (1. ábra)

Sajnos nagyon rosszban vannak, ezért úgy szeretnének utakat építeni mindhárom lakástól a megfelelő garázsig, hogy az utak ne keresszezzék egymást. (Már öregek és nem tudnak repülni.) Lehetséges ez?

- b. Ráadásul a nyaralóik is egy közös kertben vannak, de mindenkinek saját kapuja van, a 2. ábra szerint. Nem túl szerencsés elrendezés. Itt meg tudják építeni az utakat a háztól a megfelelő kapukig úgy, hogy ne keresszezzék egymást?

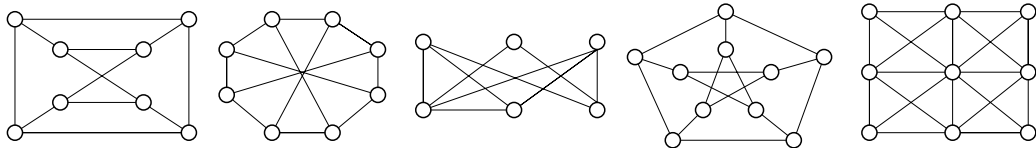


1. ábra. Mézga Aladár, Doktor Bubó és Csőrmester lakása és garázsa.



2. ábra. Mézga Aladár, Doktor Bubó és Csőrmester nyaralója.

2. Síkbarajzolhatók-e a K_6 , $K_{4,2}$, $K_{4,3}$, $K_5 - e$, $K_{3,3} - e$, $\overline{C_7}$ gráfok? Hát az alábbiak?



3. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű síkbarajzolható gráfban
 a) a minimális fokszám legfeljebb 5;
 b) ha a minimális fokszám 5, akkor legalább 12 ötödfokú pont van.
4. Mutassunk olyan síkbarajzolt gráfot, ami nem feltétlenül duálisa a duálisának.
5. Mutassunk példát olyan n csúcús gráfra, aminek exponenciálisan sok különböző duálisa van. Más szóval, létezik olyan N pozitív egész és $c > 1$ konstans, hogy tetszőleges $n > N$ esetén megadható olyan n csúcús gráf, aminek legalább c^n páronként nem izomorf duálisa van.

6. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan konvex poliéder, aminek minden oldala hatszög.
7. Egy gráfban minden pont foka legfeljebb 3, és minden köre legfeljebb 5 hosszú. Mutassuk meg, hogy a gráf síkgráf!
8. Jelölje $cr(G)$ a G gráf síkra való lerajzolásakor létrejövő élkeresztezők lehetséges minimális számát. Mennyi $cr(K_{4,4})$ értéke?
9. Bizonyítsuk be hogy $cr(K_{5,5}) \geq 11$.
10. Mutassuk meg, hogy a K_7 és a $K_{4,4}$ gráfok mindegyike tóruszra rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha G síkbarajzolt gráf, akkor G -be tetszőleges élt behúzva tóruszra rajzolható gráfot kapunk.
11. Bizonyítsuk be, hogy egy 4-reguláris egyszerű páros gráf nem lehet síkbarajzolható!
12. Mutassunk olyan 8 pontú gráfot, hogy G és \bar{G} (G komplementere) egyike sem síkbarajzolható.
13. (Hanani-Tutte tétel) Egy gráfot sikerült úgy lerajzolnunk, hogy bármely két éle páros sokszor metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy síkgráf!

Házi feladat.

1. Mennyi $cr(K_6)$ értéke?
2. Van-e olyan egyszerű síkbarajzolható gráf, melynek feleannyi csúcsa van, mint a duálisának?