## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

11. gyakorlat, 2015. április 21.

*Hipergráfok*

**Sperner tétel** (1928) $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$, minden $A, B \in \mathcal{F}$–re $A \not\subset B$ és $B \not\subset A$. Ekkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Egyenlőség esetén $\mathcal{F}$ éppen $[n]$ összes $\lfloor n/2 \rfloor$, vagy az összes $\lceil n/2 \rceil$ elemű részhalmazából áll.

**Erdős – De Bruijn tétel** (1948) $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$, minden $A \in \mathcal{F}$–re $|A| \geq 2$, és tetszőleges $1 \leq i < j \leq n$ számokhoz pontosan egy $A \in \mathcal{F}$ van, amelyre $i, j \in A$. Ekkor $|\mathcal{F}| = 1$ vagy $|\mathcal{F}| \geq n$.

1. a. Egy fának legfeljebb hány *összefüggő* részgráfját választhatjuk ki úgy, hogy egyik kiválasztott részgráf se legyen részgráfja egy másik kiválasztott részgráfnak? b. Egy fának legfeljebb hány *feszített* részgráfját választhatjuk ki úgy, hogy egyik kiválasztott részgráf se legyen részgráfja egy másik kiválasztott részgráfnak?

2. Legyen $\mathcal{F}$ Egy olyan halmazrendszer, ami nem tartalmaz $s+1$ hosszú láncot (azaz $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{s+1}$ halmazokat). Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \leq s$, ahol $f_k$ a $k$ méretű halmazok számát jelöli.

3. Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[2n]}$ olyan metsző halmazrendszer, amely minden tagjának páros az elemszáma. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{F}$-nek legfeljebb $2^{2n-2}$ tagja lehet.

4. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráfnak bármely két éle diszjunkt vagy az egyik tartalmazza a másikat. Legfeljebb hány éle lehet $\mathcal{H}$-nak?

5. Legfeljebb hány klubot alapíthat MOD-3-FALVA $n$ lakója? Ha $A_i$ jelöli az $i$-dik klub tagságát, akkor $|A_i| \not\equiv 0 \pmod 3$ és minden $i \neq j$-re $|A_i \cap A_j| \equiv 0 \pmod 3$. (*)

6. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf nem tartalmaz kört, azaz nincs olyan páronként különböző csúcsokból és hiperélekből álló $x_1, E_1, x_2, E_2, \ldots x_k, E_k, x_{k+1} = x_1$ sorozat, ahol az $E_i$ él tartalmazza az $x_i$ és $x_{i+1}$ csúcsokat. Mutassuk meg, hogy ha $\emptyset$ nem éle $\mathcal{H}$-nak és $\mathcal{H}$ összefüggő is (azaz $V$ nem állítható elő két diszjunkt nemüres $V_1$ és $V_2$ halmaz uniójaként úgy, hogy minden hiperél valamelyik $V_i$ halmaz része), akkor igaz, hogy $\sum\{|E| - 1 : E \in \mathcal{E}\} = |V| - 1$ .

7. Mutassunk olyan $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszert, hogy $\mathcal{F}$ bármely két tagjának metszete legalább két elemet tartalmaz és $|\mathcal{F}| = 2^{n-2}$? Létezhet-e ennél nagyobb halmazrendszer a fenti tulajdonsággal?
   Hasznos igazság: $\binom{2k}{k} \leq 2^{2k-1}$. (Sőt, $\leq 2^{2k}/\sqrt{k}$ ha $k$ elég nagy.)

### Régi zárthelyi feladatok

1. Mutassuk meg, hogy $R(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{k}) \leq k!(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}) + 1$.

2. Tegyük fel, hogy a gömbön úgy adott 12, egymástól nem feltétlenül különböző pont, hogy azokból legalább 49 különböző egységtávolságra lévő pontpár választható ki. Igazoljuk, hogy a gömb sugara kisebb 1-nél.

3. Legfeljebb hány vektort tartalmazhat az $X \subseteq \{0, 1\}^n$ halmaz, ha tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in X$ vektorokra létezik olyan $i \in [n]$ koordináta, amire $\underline{u}_i = 1$ és $\underline{v}_i = 0$?

Kombinatorika és gráfelmélet II

# 2. Aláíráspótló ZH

2012. május 15. 8.00-9.30, IB 028

1. Bizonyítsuk be, hogy minden $k \geq 3$–ra

$$R(\underbrace{4, 4, \ldots, 4}_{k}) \geq 3 \cdot R(\underbrace{4, 4, \ldots, 4}_{k-1}) - 2.$$

($R(\underbrace{m, m, \ldots, m}_{k})$ az a legkisebb $R$ szám, amelyre igaz, hogy az $R$ csúcsú teljes gráf éleit akárhogy színezzük $k$ színnel, lesz egy $m$ csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle ugyanolyan színű.)

2. A $G$ gráfnak 40 csúcsa és 407 éle van. Bizonyítsuk be, hogy $G$ tartalmaz három éldiszjunkt háromszöget.

3. Bizonyítsuk be, hogy minden $k \geq 2$–re létezik egy $M(k)$ a következő tulajdonsággal. Akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \ldots, M(k)$ számokat $k$ színnel, léteznek olyan $x$, $y$, $a$, $b$, $c$ egyforma színű, de különböző számok, $(1 \leq x, y, a, b, c \leq M(k))$, amelyekre

$$\frac{x+y}{2} = \frac{a+b+c}{3}.$$

4. Adott egy 100 elemű $H$ halmaz $k$ darab részhalmaza, mindegyik vagy 30, vagy 80 elemű. Semelyik két adott részhalmaz sem diszjunkt. Bizonyítsuk be, hogy $k$ lehetséges legnagyobb értéke

$$\binom{99}{29} + \binom{100}{20}.$$

5. $G$ egy páros gráf $A$ és $B$ osztályokkal. $|A| = 11$, $|B| = 10$. Tetszőleges két $A$-beli csúcsnak pontosan két közös szomszédja van $B$-ben. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $A$-beli csúcs, amelyeknek pontosan két $B$-beli szomszédja van.

6. $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$. Tudjuk, hogy ha $A, B \in \mathcal{F}$, és $A \subset B$, akkor $|A| = 1$.
a.) Bizonyítsuk be, hogy

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + n$$

b.) Adjunk meg $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + n$ részhalmazt, amelyek teljesítik a feltételt.