

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

1. gyakorlat, 2015. február 10.

Síkgráfok

1. Egy egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkbarajzolt gráf minden tartománya háromszög. Bizonyítsuk be, hogy pontosan $3n - 6$ éle van.
2. Hány csúcsa van annak a síkbarajzolható gráfnak, amit 3 háromszög-, 3 négyszög- és egy ötszöglap határol?
3. Biz. be: Ha G n pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor
 - a) egyúttal tóruszra is rajzolható;
 - b) ha G -nek $3n - 6$ -nál kevesebb éle van, akkor behúzható G -be új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
 - c) G bármely síkbarajzolásakor ugyanannyi tartomány keletkezik;
 - d) G -nek vagy van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy G tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja.
4. Adjunk meg olyan 8 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráfot, aminek a komplementere is síkbarajzolható!
5. Mutassuk meg, hogy ha $|V(G)| \geq 11$, akkor G és \bar{G} egyike biztosan nem síkgráf.
6. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű, síkbarajzolható gráf csúcsai kiszínezhetők 6 különböző színnel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színt kapjanak.
7. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (még hozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!
8. Bizonyítsuk be, hogy minden síkbarajzolt G gráf 3-összefüggővé tehető további élek behúzásával a síkbarajzolttság megtartása mellett. Igazoljuk, hogy ha G síkbarajzolt és minden lapja háromszög, akkor G 3-összefüggő.
9. Mutassuk meg, hogy ha egy G egyszerű síkgráfban a legrövidebb kör hossza g , akkor $|E(G)| \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$.
10. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap található. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?

Házi feladat.

1. Mutassuk meg, hogy ha a G síkbarajzolt gráf minden lapját páros számú él határolja, akkor G páros gráf.
2. Egy 20-csúcsú poliédernek 12 lapja van, mindegyik k oldalú sokszög. Mennyi a k értéke?