

Kombinatorika és gráfelmélet II  
2. ZH, 2013. április 29. 10.15-11.45, Kf 81  
**Javítókulcs**

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenként az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozattól. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. a. Bizonyítsuk be, hogy  $R(3, 3, k) \leq R(6, k)$ .

b. Bizonyítsuk be, hogy  $R(3, 3, k) \leq (k + 4)^5$ .

( $R(k_1, k_2, \dots, k_m)$  a legkisebb  $R$  szám azzal a tulajdonsággal, hogy egy teljes  $R$  csúcsú gráf éleit akárhogyan színezzük az  $1, 2, \dots, m$  színekkel, valamilyen  $i$ -re lesz egy  $k_i$  csúcsú teljes részgráf, amelynek az összes éle  $i$  színű.)

a. Tekintsünk egy  $R(6, k)$  csúcsú teljes gráfot, és színezzük ki az éleit az  $1, 2, 3$  színekkel. Be kell látnunk, hogy mindenképpen lesz egy háromszög, amelynek minden éle  $1$  színű, vagy egy háromszög, amelynek minden éle  $2$  színű, vagy egy teljes  $k$  csúcsú részgráf, amelynek minden éle  $3$  színű. 2 pont

Módosítsuk a színezést úgy, hogy az  $1$  és a  $2$  színű éleket átszínezzük  $12$  színűre. 2 pont

$R(6, k)$  definíciója szerint ebben az új színezésben található egy teljes  $6$  csúcsú részgráf, amelynek minden éle  $12$  színű vagy egy teljes  $k$  csúcsú részgráf, amelynek minden éle  $3$  színű. 1 pont

Az első esetben ennek a teljes  $6$  csúcsú gráfnak az eredeti színezésben minden éle  $1$  vagy  $2$  színű, és mivel  $R(3, 3) = 6$ , (ezt tanultuk is, de nagyon könnyű belátni) ezért található egy háromszög, amelynek minden éle  $1$  színű, vagy egy háromszög, amelynek minden éle  $2$  színű. 2 pont

A második esetben ez az eredeti színezésben is egy  $k$  csúcsú részgráf, amelynek minden éle  $3$  színű, tehát készen vagyunk. 1 pont

b. Az Erdős-Szekeres-féle felső korlát és az a. rész alapján  $R(3, 3, k) \leq R(6, k) \leq \binom{k+4}{5} = \frac{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)k}{5!} < (k+4)^5$ . 2 pont

2. Legyen  $k > 0$  tetszőleges egész, és tegyük föl, hogy ki van színezve az összes egész szám  $k$  színnel. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan egyszínű,  $a, b, c > 1$  számok, amelyekre  $a \cdot b = c$ .

Legyen  $S : \mathbb{Z} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  az egész számok egy tetszőleges színezése  $k$  színnel. Defináljunk a pozitív egész számoknak egy  $S' : \mathbb{N}^+ \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  színezését a következő módon. Tetszőleges  $m > 0$ -ra legyen  $S'(m) = S(2^m)$ . 5 pont

A Schur tétel alapján az  $S'$  színezésben találhatóak olyan egyforma színű,  $x, y, z > 0$  számok, (vagyis  $S'(x) = S'(y) = S'(z)$ ) amelyekre  $x + y = z$ . 3 pont

De ekkor az  $a = 2^x$ ,  $b = 2^y$ ,  $c = 2^z$  számokra  $S(a) = S(b) = S(c)$ ,  $a, b, c > 1$  és  $a \cdot b = c$ . 2 pont

3.  $G$  egy egyszerű páros gráf  $A$  és  $B$  osztályokkal,  $|A| = 85$ ,  $|B| = 10$ . Minden  $A$ -beli pontnak 4 a foka és bármely két  $A$ -beli pontnak legfeljebb 3 közös szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy van két  $A$ -beli pont, amelyeknek nincs közös szomszédja.

Legyenek  $A$  csúcsai  $a_1, a_2, \dots, a_{85}$ , és minden  $i$ -re ( $1 \leq i \leq 85$ ) legyen  $B_i \subset B$   $a_i$  szomszédainak a halmaza. 2 pont

Tudjuk, hogy minden  $i$ -re  $|B_i| = 4$  és a feltétel szerint minden  $i \neq j$ -re  $|B_i \cap B_j| \leq 3$ , tehát a  $B_i$  halmazok mind különbözők. 2 pont

Az Erdős-Ko-Rado tétel szerint ha  $\mathcal{F}$  egy 10 elemű halmaz 4 elemű részhalmaiból álló metsző halmazrendszer, akkor  $|\mathcal{F}| \leq \binom{9}{3} = 84$ . 3 pont

De mivel most eggyel több, 85 részhalmazunk van, valamelyik kettő, mondjuk  $B_i$  és  $B_j$  diszjunktak, akkor viszont  $a_i$ -nek és  $a_j$ -nek nincs közös szomszédja. 3 pont

4.  $G$  egy 100 csúcsú és 2500 élű gráf. Bizonyítsuk be, hogy  $G$  tartalmaz három vagy négy hosszúságú kört.

1. megoldás: Tegyük fel, hogy  $G$ -ben nincs háromszög. Ekkor, a Turán tétel szerint,  $G$ -nek legfeljebb annyi éle van, mint a 100 csúcsú, 2 osztályú  $T(100, 2)$  Turán gráfnak, ha pedig éppen ennyi éle van, akkor  $G$  izomorf  $T(n, 2)$ -vel. 4 pont

A  $T(100, 2)$  Turán gráf éppen egy  $K_{50,50}$  teljes páros gráf, amelynek 2500 éle van, annyi mint  $G$ -nek, tehát  $G$  izomorf  $K_{50,50}$ -nel. 3 pont

Viszont  $K_{50,50}$ -ben bőven találhatóunk négy hosszú köröket! 3 pont

2. megoldás: Tegyük fel, hogy a  $G$  100 csúcsú gráfban nincs 4 hosszú kör. Legyenek a fokszámok  $d_1, d_2, \dots, d_{100}$ , az átlagfokszám  $\bar{d} = (d_1 + d_2 + \dots + d_{100})/100$ .

Legyen  $U$  a 2 hosszú utak száma. Mivel egy  $d$  fokú csúcs éppen  $\binom{d}{2}$  darab 2 hosszú út közepe,

$$U = \sum_{i=1}^{100} \binom{d_i}{2}.$$

3 pont

Ugyanakkor egy pontpár legfeljebb egy 2 hosszú útnak lehet a két vége, mert nincs 4 hosszú kör, tehát

$$U \leq \binom{100}{2}.$$

3 pont

Felhasználva, hogy az  $y = \binom{x}{2}$  függvény konvex,

$$100 \cdot \binom{\bar{d}}{2} \leq \sum_{i=1}^{100} \binom{d_i}{2} = U \leq \binom{100}{2}$$

tehát  $\bar{d}(\bar{d} - 1) \leq 198$ , ezért  $\bar{d} \leq 14$ . 3 pont

Vagyis  $G$ -nek legfeljebb  $(14 \cdot 100)/2 = 700$  éle lehet. Tehát ha 2500 éle van, akkor már BŐVEN van négy hosszú kör. 1 pont

5. Az  $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$  halmazrendszeréről tudjuk, hogy ha  $A, B \in \mathcal{F}$ , és  $A \subset B$ , akkor  $|A| = 2$ . Bizonyítsuk be, hogy

$$|\mathcal{F}| \leq 2 \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

1. megoldás: Legyen

$$\mathcal{F}_1 = \{ A \in \mathcal{F} \mid \text{van } B \in \mathcal{F} \text{ amelyre } A \subset B \}$$

és legyen

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_1.$$

2 pont

Az állítjuk, hogy  $\mathcal{F}_1$  és  $\mathcal{F}_2$  is Sperner rendszert alkot. 2 pont

Tegyük fel, hogy  $A, A' \in \mathcal{F}_1$  és  $A \subset A'$ . Mivel  $A' \in \mathcal{F}_1$ , létezik olyan  $B \in \mathcal{F}$  amelyre  $A' \subset B$ . Tehát  $A \subset A' \subset B$ . A feltételek szerint viszont ekkor  $|A| = |A'| = 2$  ami nem lehetséges. 2 pont

Most legyen  $A \in \mathcal{F}_2$ . Mivel  $A \notin \mathcal{F}_1$ , nem létezik olyan  $B \in \mathcal{F}$  amelyre  $A \subset B$ . 2 pont

Mivel  $\mathcal{F}_1$  és  $\mathcal{F}_2$  is Sperner rendszert alkot, a Sperner tétel szerint

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| \leq 2 \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

2 pont

2. megoldás: Legyen

$$\mathcal{F}_1 = \{ A \in \mathcal{F} \mid |A| = 2 \}$$

és legyen

$$\mathcal{F}_2 = \{ A \in \mathcal{F} \mid |A| \neq 2 \}.$$

Az állítjuk, hogy  $\mathcal{F}_1$  és  $\mathcal{F}_2$  is Sperner rendszert alkot.

Tegyük fel, hogy  $A, A' \in \mathcal{F}_1$  és  $A \subset A'$ . Ekkor  $|A| = |A'| = 2$  lenne, ami lehetetlen.

Most tegyük fel, hogy  $A, A' \in \mathcal{F}_2$  és  $A \subset A'$ . Mivel  $|A| \neq 2$ , ez is lehetetlen.

Mivel  $\mathcal{F}_1$  és  $\mathcal{F}_2$  is Sperner rendszert alkot, a Sperner tétel szerint

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| \leq 2 \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

2 pont

2 pont

2 pont

2 pont

2 pont

6.  $\{A_1, A_2, \dots, A_{12}\} \subseteq 2^{[10]}$ . Minden  $i \neq j$ -re  $|A_i \cup A_j| = 9$ . Bizonyítsuk be, hogy van olyan  $i \neq j$ , amelyre  $A_i = A_j$ .

Tegyük fel, hogy az  $A_1, A_2, \dots, A_{12}$  halmazok mind különbözők.

Legyen minden  $i$ -re ( $1 \leq i \leq 12$ )  $B_i = \bar{A}_i$  vagyis  $A_i$  komplementere, persze a  $B_1, B_2, \dots, B_{12}$  halmazok is mind különbözők.

A feltétel szerint minden  $i \neq j$ -re  $|B_i \cap B_j| = 1$ .

Viszont ekkor a Fisher egyenlőtlenség szerint legfeljebb 10 ilyen halmazunk lehetne, ami ellentmondás, hiszen a feltétel szerint 12 különböző halmazunk van.

Tehát hibás a feltevésünk, hogy az  $A_1, A_2, \dots, A_{12}$  halmazok mind különbözők, van olyan  $i \neq j$ , amelyre  $A_i = A_j$ .

1 pont

2 pont

3 pont

3 pont

3 pont

3 pont

1 pont