Kombinatorika és gráfelmélet II

1. Pót ZH, 2013. május 14. 14.15-15.45, H 406

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. A G egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt gráfnak $n \geq 3$ csúcsa van, és nem tartalmaz 3, 4 és 5 hosszú kört. Bizonyítsuk be, hogy G duálisa, G^*, nem egyszerű gráf.

Tegyük fel, hogy G^* egyszerű gráf. G^* minden csúcsa megfelel egy tartománynak, a fokszáma pedig egyenlő a megfelelő tartományt határoló élek számával. 2 pont

Mivel G-ben nincs 3, 4 és 5 hosszú kör, minden tartományát legalább 6 él határolja. 3 pont

Tehát G^* minden csúcsának a foka legalább 6. 2 pont

Jelölje t G^* csúcsainak a számát. A fentiek szerint G^*-nak legalább $6t/2 = 3t$ éle van, ami lehetetlen, mert egy egyszerű, t csúcsú síkgráfnak legfeljebb $3t - 6$ éle lehet. 3 pont

2. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V, E_1)$ és a $G_2(V, E_2)$ is fa.
a. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 4$. (Vagyis két fa uniójának kromatikus száma legfeljebb 4.)
b. Mutassunk olyan gráfot, amely két fa uniója, és kromatikus száma 4.

a. 1. megoldás: Jelölje n G csúcsainak a számát. A következő állítást bizonyítjuk be, indukcióval: két erdő (körmentes gráf) uniója kiszínezhető négy színnel. $n \leq 4$-ra nyilvánvalóan igaz, hiszen minden csúcsot színezhetünk különböző színűre. Tegyük fel, hogy $n > 4$ és kevesebb csúcsú gráfokra már beláttuk az állítást. 2 pont

$G_1(V, E_1)$ és $G_2(V, E_2)$ egy erdő, ezért mindkettőnek legfeljebb $n - 1$ éle van. 2 pont

Ebből következik hogy G-nek legfeljebb $2n - 2$ éle van, tehát van egy v csúcsa, amelynek a foka legfeljebb 3. 2 pont

A $G \setminus v$ gráf is teljesíti a feltételeket, tehát az indukciós feltevés szerint kiszínezhető 4 színnel. 1 pont

A v csúcsnak csak 3 szomszédja van, így a négy szín közül legalább egy különbözik ezek színétől, ezzel kiszínezhetjük v-t. 2 pont

a. 2. megoldás: A fák páros gráfok, ezért kiszínezhetők 2 színnel. Színezzük ki $G_1(V, E_1)$ csúcsait a P és K színekkel, és színezzük ki $G_2(V, E_2)$ csúcsait az 1 és 2 színekkel. 3 pont

Tekintsük ennek a két színezésnek a *szorzatát*, vagyis minden pont kapja a (P, 1), (K, 1), (P, 2), (K, 2), színek valamelyikét a két eredeti színnek megfelelően. 3 pont

Ez egy jó színezés négy színnel. Ha két pont össze van kötve G-ben, akkor vagy G_1-ben vagy G_2-ben is össze vannak kötve, ezért G_1 vagy G_2 színezésben különböző színt kaptak. Ezért a szorzat-színük is különböző. 3 pont

b. A teljes 4 csúcsú gráf éppen két 3 hosszú út uniója, és kromatikus száma 4. 1 pont

3. Tetszőleges n csúcsú G síkbarajzolt gráfra legyenek $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a csúcsok fokszámai, $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek F_1, F_2, …, F_t a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Legyen

$$s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| + a) + \sum_{i=1}^{n} (d_i + b) .$$

Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy $s(G)$ értéke ugyanannyi legyen minden, legalább 3 csúcsú, egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt G gráfra.

Legyen $n = n(G)$, $e = e(G)$ és $t = t(G)$ G csúcsainak, éleinek és tartományainak a száma. $s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| + a) + \sum_{i=1}^{n} (d_i + b) = \sum_{i=1}^{t} |F_i| + at + \sum_{i=1}^{n} d_i + bn = 4e + at + bn.$ 4 pont

Az Euler formula alapján minden, legalább 3 csúcsú, egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt G gráfra $n - e + t = 2$. Tehát $4e - 4n - 4t = -8$. 3 pont

Válasszuk a és b értékét egyaránt -4-nek, ekkor $4e + at + bn = 4e - 4n - 4t = -8$, minden, a feltételeknek eleget tevő G gráfra. 3 pont

4. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$, v_i és v_j között akkor és csak akkor van él, ha $i + j$ nem osztható 3-mal. Milyen n-re lesz G perfekt?

Legyen V_0, V_1 és V_2 azon csúcsok halmaza, amelyeknek az indexe 3-mal osztva rendre 0, 1 és 2 maradekot ad. A gyenge perfekt gráf tétel szerint egy gráf perfekt akkor és csak akkor, ha a komplementere perfekt. Ugyhogy vizsgáljuk G komplementerét, $\overline{G}$-t. Itt két csúcs akkor és csak akkor van összekötve, ha $i + j$ osztható 3-mal. 3 pont

Vagyis V_0 egy teljes gráfot feszít, ezenkívül minden V_1-beli csúcs össze van kötve minden V_2-beli csúccsal. Más él nincs. 4 pont

Tehát $\overline{G}$ egy teljes és egy teljes páros gráf diszjunkt uniója. Mindkettőről tudjuk, hogy perfekt, így a diszjunkt uniójuk is az. Tehát $\overline{G}$ minden n-re perfekt, ezért G is minden n-re perfekt. 3 pont

5. G egy n csúcsú gráf, $d_1, d_2, \ldots, d_k$ azok a fokszámok G-ben, amelyek nagyobbak, mint 2. Tudjuk, hogy $d_1 + d_2 + \cdots + d_k \leq 17$. Bizonyítsuk be, hogy G síkgráf.

Tegyük fel, hogy G nem síkgráf. Ekkor a Kuratowski tétel szerint tartalmaz egy topologikus K_5-öt, vagy topologikus $K_{3,3}$-at. 4 pont

Tehát vagy van hat csúcsa (a topologikus $K_{3,3}$ fő csúcsai), amelyeknek a foka legalább 3, vagy öt csúcsa (a topologikus K_5 fő csúcsai), amelyeknek a foka legalább 5. 3 pont

Első esetben $d_1 + d_2 + \cdots + d_k \geq 18$, a második esetben meg $d_1 + d_2 + \cdots + d_k \geq 20$, mindkettő lehetetlen. Tehát G síkgráf. 3 pont

6. 10000 ember sorban áll a Kombi 2 vizsgán. Bizonyítsuk be, hogy vagy található 100 ember a sorban úgy, hogy e 100 ember között aki hátrább áll, az mindig *alacsonyabb* az előbbre állónál, vagy pedig található 100 ember a sorban úgy, hogy e 100 ember között aki hátrább áll, az mindig *magasabb* az előbbre állónál.

Legyenek az emberek a sorban, elölről hátrafele számozva $E_1, E_2, \ldots, E_{10000}$. Definiájunk egy $\prec$ részbenrendezést a 10000 ember között a következő módon. $E_i \prec E_j$ akkor és csak akkor, ha $i < j$ és E_i magasabb mint E_j. 4 pont

A Diworth tétel (vagy a duális Dilworth tétel, vagy az összehasonlítás–gráfok perfektsége) alapján az $(\{E_1, E_2, \ldots, E_{10000}\}, \prec)$ részbenrendezett halmazban vagy van egy 100 hosszú lánc, vagy egy 100 hosszú antilánc. 3 pont

Az első esetben ez éppen 100 embert jelent úgy, hogy aki hátrább áll, az *alacsonyabb* az előbbre állónál, a második esetben pedig éppen fordítva, ez éppen 100 ember úgy, hogy aki hátrább áll, az *magasabb* az előbbre állónál. 3 pont