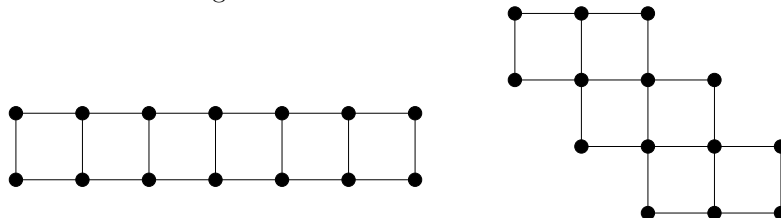


## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

4. gyakorlat, 2013. március 5.

*Dualitás, síkgráfok színezése*

1. Bizonyítsuk be, hogy egy síkbarajzolható gráf tartományai akkor és csak akkor színezhethők ki két színnel, ha minden pont foka páros.
2. Gyengén izomorfak-e az itt látható gráfok?



3. Bizonyítsuk be, két fa pontosan akkor gyengén izomorf, ha ugyanannyi pontjuk van.
4. Mutassunk minden  $n > 3$ -ra olyan  $n$  csúcsú síkbarajzolt gráfot, amely izomorf a duálisával.
5. Mutassuk meg, hogy tetszőleges egyszerű síkgráf élhalmaza előáll, mint 2 páros gráf élhalmazának uniója.
6. A  $G$  és a  $G^*$  véges egyszerű gráfok egymás duálisai. Bizonyítsuk be, hogy  $\min\{\delta(G), \delta(G^*)\} = 3$ .  $\delta$  a legkisebb fokszám.
7. Legyen  $G$  olyan  $n \geq 3$  csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, melyben az élek száma  $3n - 6$ . Mennyi  $G$  duálisának maximális fokszáma?
8. Jelölje  $F_n = K_{n,n} - nK_2$  azt a páros gráfot, melyet úgy kapunk a  $K_{n,n}$  teljes páros gráfból, hogy elhagyjuk belőle egy teljes párosítás éleit. Milyen  $n$ -ek esetén lesz  $F_n$  síkbarajzolható?
9. Egy gráfot *külsíkgráfnak* nevezünk, ha lerajzolható a síkba az élek kereszteződése nélkül úgy, hogy minden csúcs rajta van az egyik (például a külső) tartomány határán. (a) Legfeljebb hány éle lehet egy külsíkgráfnak? (b) Adjunk a Kuratowski-tételhez hasonló karakterizációt a külsíkgráfokra, azaz adjunk meg egy olyan (véges)  $\mathcal{F}$  gráfalmazt, hogy igaz legyen a következő: egy gráf pontosan akkor külsíkgráf, ha nem tartalmaz  $\mathcal{F}$ -beli gráffal topologikusan izomorf részgráfot! (c) Legfeljebb mennyi a kromatikus száma egy külsíkgráfnak?
10. Tetszőleges összefüggő, síkbarajzolható  $G$  gráfhoz mutassunk olyan, önmagával duális  $G'$  síkbarajzolt gráfot, aminek  $G$  feszített részgráfja.
11. Legfeljebb mennyi a perfekt síkgráfok kromatikus száma?

### Házi feladat.

1. Tegyük fel, hogy  $G$  síkbarajzolt gráf,  $G$  minden lapja háromszög és  $G^*$  minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van  $G$ -nek?
2. Bizonyítsuk be, hogy minden (legalább három csúcsú) egyszerű síkgráfnak van legalább három olyan csúcsa, amelyeknek a foka kevesebb mint hat.