

## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

12. gyakorlat, 2013. április 30.

### Homogén lineáris rekurziók bevezetés

Fibonacci számok:  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  és minden  $n > 1$ -re  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ . Ekkor

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

1. Bizonyítsuk be, hogy  $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$  ill., hogy  $F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ . ( $F_n$  a Fibonacci sorozat  $n$ -dik elemét jelöli.)
2. Mutassuk meg, hogy  $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ .
3. Mutassuk meg, hogy  $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$ .
4. Oldjuk meg az  $a_0 = 1, a_1 = 0$   $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$  rekurziót.
5. Oldjuk meg az  $a_0 = 3, a_1 = -3$   $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$  rekurziót.
6. Oldjuk meg az  $a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 0$   $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$  rekurziót.
7. Hányféleképpen mehetünk fel egy  $n$  fokból álló lépcsőn egyes és kettes lépésekkel?
8. Hányféleképp lehet lefedni egy  $2 \times n$ -es táblát  $1 \times 2$ -es és  $2 \times 2$ -es dominók felhasználásával?

### Házi feladat

1. Oldjuk meg az  $a_0 = 0, a_1 = 0, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$  nem homogén lineáris rekurziót.