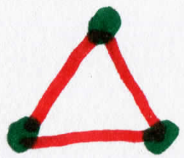
Turán típusú tételek

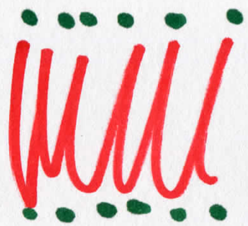
n csúcsú egyszerű gráf: élek max száma: $\binom{n}{2}$

És ha valamit megtiltunk a gráfban?

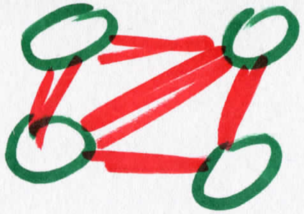
Pl: nincs  él: max él $= 0$

nincs  $\Rightarrow$ max fok ≤ 1 $\Rightarrow$ max él $= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

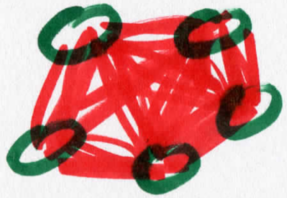
nincs  Mantel 1907: max él $= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

Példa: 

$K_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$ teljes páros gráf.

m osztályú gráf:  m db csúcsok m osztályban, élek csak osztályok között

(m osztályú $\Leftrightarrow \chi \leq m$)

m osztályú teljes gráf:  m db

m osztályú, osztályok között minden él be van húzva.

$T_{n,m}$ n csúcsú, m osztályú Turán gráf:

m osztályú teljes, osztályok egyformák, amennyire lehet.

ha $n = q \cdot m + r$: r osztály: $q+1$ csúcs

$m-r$ osztály: q csúcs

Pl. $T_{n,2} = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ (Mantel tételből)

Def: n csúcsú gráf, max él, ha nem tartalmazza H-t mint részgráfot: $ex(n,H)$

<u>Turán 1941</u>: n csúcsú gráf, max él, ha nem tartalmaz K_{m+1}-et $= |E(T_{n,m})|$

$$ex(n, K_{m+1}) = |E(T_{n,m})|$$

Sőt: Ha G n csúcsú, G nem tartalmaz K_{m+1}-et, és
$$|E(G)| = |E(T_{n,m})| = ex(n, K_{m+1})$$

akkor $G \simeq T_{n,m}$ ($T_{n,m}$ az egyetlen extremális példa)

Turán biz:

Trivi: $T_{n,m}$ nem tartalmaz K_{m+1}-et.

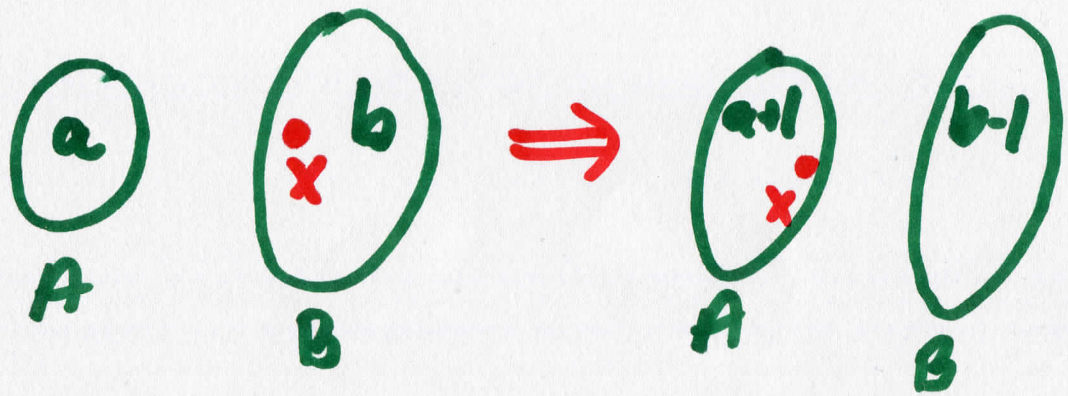
$$\Longrightarrow \quad ex(n, K_{m+1}) \geq |E(T_{n,m})|$$

(általában: m oszt. gráf nem tartalmaz K_{m+1}-et)

1. n csúcsú m osztályú gráfok közül $T_{n,m}$-nek van a legtöbb éle.

Biz: G teljes m oszt. gráf, két osztály A, B, $|A| = a$, $|B| = b$

$\underline{a \leq b-2}$ $\quad x \in B$, tegyük át A-ba:



$\underline{-a+b-1 > 0}$ az élszám változása!

Ezt ismételjük $\rightsquigarrow T_{n,m}$

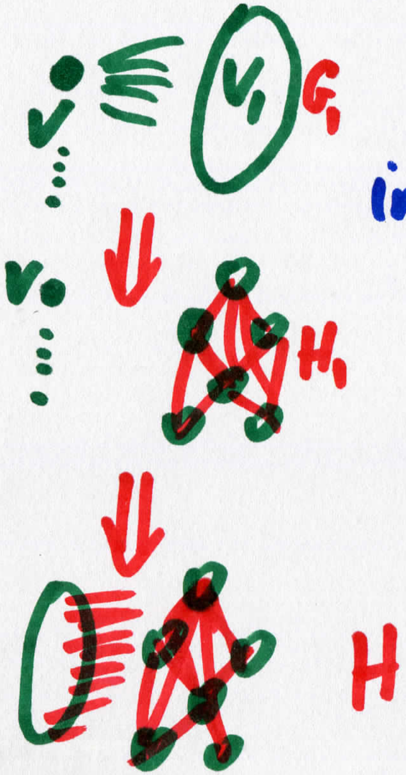
2\. $G \not\supset K_{m+1} \Rightarrow$ van m osztályú teljes H gráf ugyanazokon a csúcsokon úgy, hogy minden v-re $d_H(v) \geq d_G(v)$

(ekkor persze $|E(H)| \geq |E(G)|$)

Biz: indukció m-re. $m=1$: trivi (1 osztály illetve nincs K_2: $\forall d_i = 0$)

Tfh $m-1$-re már beláttuk.

$G \not\supset K_{m+1}$, v: max fokú csúcs G-ben. V_1: v szomszédai:



$G(V_1) = G_1$: nincs K_m! (v-vel K_{m+1} lenne)

indukció: van H_1 V_1-en: $m-1$ osztályú, $d_{G_1}(u) \leq d_{H_1}(u)$

V_2: többi csúcs.

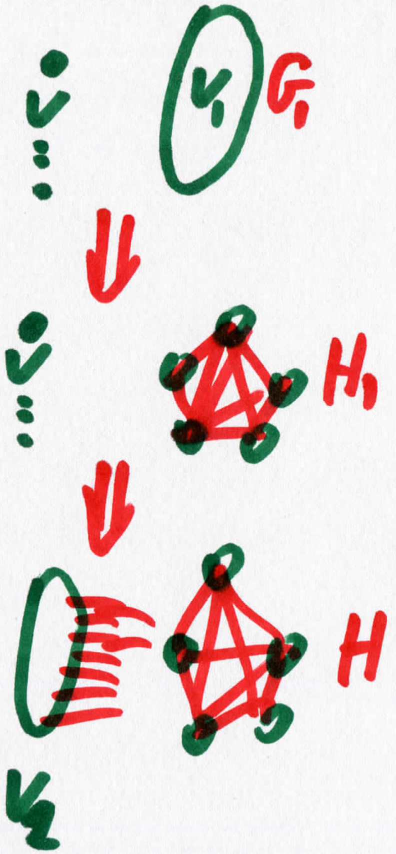
H: V_1-en $H = H_1$ ($m-1$ osztály)

V_2: m-edik osztály: V_2-ben nincs él,

$V_2 - V_1$: minden él.

Áll: H jó: $d_G(u) \leq d_H(u)$ $\forall u$

G $\quad v$: max fokú.



Áll: H jó: $\forall u: d_G(u) \leq d_H(u)$

Ha $u \in V_2: d_H(u) = |V_1| = d_G(v) \geq d_G(u)$ ✓

$u \in V_1: d_H(u) = d_{H_1}(u) + |V_2| \geq d_{G_1}(u) + |V_2| \geq d_G(u)$ ✓

Turán: nincs $K_{m+1} \Rightarrow |E(G)| \leq |E(T_{n,m})|$

$T_{n,m}$: kb minden m-edik él „hiányzik".

$$d_v \approx \left(1 - \frac{1}{m}\right) n$$

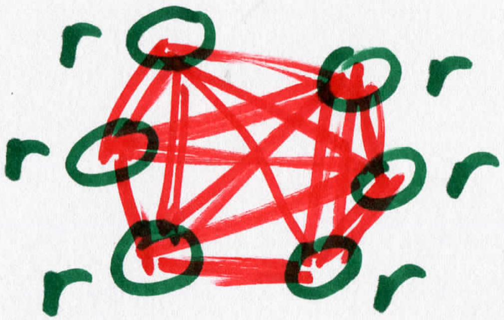
$$|E(T_{n,m})| \approx \left(1 - \frac{1}{m}\right) \binom{n}{2} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{|E(T_{n,m})|}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{m}$$

n csúcs, $|E| > |E(T_{n,m})| \Rightarrow$ van K_{m+1}

Erdős–Stone: Minden $\varepsilon > 0$-ra és $r > 0$-ra van $n_0(\varepsilon, r)$:

ha $n > n_0(\varepsilon, r)$ és $|E(G)| \geq |E(T_{n,m})| + \varepsilon \cdot n^2$

$\Rightarrow G \supset T_{(m+1)r,\, m+1}$



$m+1$ r-es osztály (felfújt K_{m+1})

Ekvivalens:

H $n > n_0$ és $|E(G)| \geq \binom{n}{2}\left(1 - \frac{1}{m} + \varepsilon\right)$

$\Rightarrow G \supset T_{(m+1)r,\, m+1}$

Ha $\chi(H) \le m+1$, akkor $H \subset T_{(m+1)r,r}$ ha r elég nagy.

(Felfújt K_{m+1} minden $m+1$-kromatikus gráfot tartalmaz)

<u>Erdős-Simonovits:</u>

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$$

Erdős-Simonovits: $\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$.

Biz 1: $T_{n,\chi(H)-1}$-ben nincs H,

$$\lim \frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}} \geq \lim \frac{|E(T_{n,\chi(H)-1})|}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$$

2. Erdős-Stone:

$n > n_0$, $|E(G)| \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \varepsilon\right)\binom{n}{2} \Rightarrow$ G-ben van felfújt $K_{\chi(H)}$, ebben meg van H.

$$\Rightarrow \lim \frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}} \leq 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$$

KÉSZ

Ha H páros gráf ($\chi=2$). $\lim \dfrac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}} = \left(1-\dfrac{1}{2-1}\right)\binom{n}{2} = 0$

$ex(n,H) = o(n^2)$ De mennyi??

$ex(n, C_4) \approx n^{3/2}$ ugyanaz $ex(n, K_{2,2}) \approx n^{3/2}$

$ex(n, C_6) \approx n^{4/3}$ $\qquad$ $ex(n, K_{3,3}) \approx n^{5/3}$

$ex(n, C_{10}) \approx n^{6/5}$

$$c \cdot n^{2-\frac{2}{r}} \le ex(n, K_{r,s}) \le c \cdot n^{2-\frac{1}{r}}$$

$$r \le s$$

De ha $(r-1)! < s$:

$$c \cdot n^{2-\frac{1}{r}} \le ex(n, K_{r,s}) \le c' \cdot n^{2-\frac{1}{r}}$$

Erdős-Kővári-Sós-Turán: $ex(n, C_4) \le c \cdot n^{3/2}$

Biz. G: n csúcs, nincs C_4, fokok $d_1 \cdots d_n$

Számoljuk össze a $<$-ket: $\# < \; = \sum_1^n \binom{d_i}{2}$ 

de $\# < \; \le \binom{n}{2}$  (két ponton max 1 V van)

$y = \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$

Legyen $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$ átlagfokszám.

$$\frac{\binom{d_1}{2} + \cdots \binom{d_n}{2}}{n} \ge \binom{\bar{d}}{2}$$

Jensen egyenlőtlenség

$$\Downarrow$$

$$\binom{\bar{d}}{2} \cdot n \le \sum \binom{d_i}{2} = \# < \; \le \binom{n}{2}$$

$$\binom{\bar{d}}{2} \cdot n \leq \binom{n}{2}$$

$$\bar{d}(\bar{d}-1) \leq n-1$$

$$\bar{d} \leq \sqrt{n}$$

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{2e}{n} \leq \sqrt{n}$$

$$e \leq \frac{n \cdot \sqrt{n}}{2} = \frac{n^{3/2}}{2}$$

$$c \cdot n^{3/2} \leq ex(n, C_4) \leq \frac{n^{3/2}}{2}$$

később látni fogjuk