Súlyátrendező módszer

<u>Négyszíntétel</u> (Appel-Haken 76) G síkgráf $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$

Bizonyítás: súlyátrendező módszer (discharging method) segítségével redukálják kb 6000 esetre.

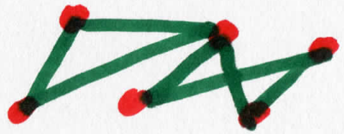
Esetek vizsgálata: számítógéppel.

1997 Robertson, Sanders, Seymour, Thomas: sokkal egyszerűbb bizonyítás, csak 633 eset, átlátható. (De ehhez is kell számítógép)

Duális gráfra: ~ Minden térkép kiszínezhető 4 színnel.

Súlyátrendező módszer bemutatása: Ackerman–Tardos tétel.

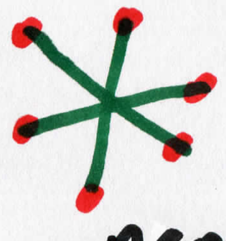
Gráf lerajzolva a síkra: egyszerűség kedvéért élek mindig egyenes szakaszok.



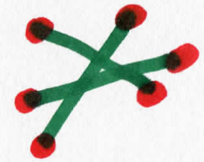
G: n csúcs, e él, lerajzolva, nincs 
(egyszerű gráf)

$\Downarrow$

G síkgráf, $e \le 3n-6$

Ackerman–Tardos:  lehet, de  nem. Max e?

A-T 2007. G: n csúcs, e él, lerajzolva (szakaszokkal mint élekkel) és nincs 3 páronként metsző él.



$\Rightarrow e \le 6{,}5n - 20$

Bebizonyítjuk: $e \le 19n$ $(n \ge 2)$

Ha van v: $d(v) \le 19$, akkor hagyjuk el v-t.

G': $n' = n-1$ csúcs, $e' \ge e - 19$, indukció: $e' \le 19n'$

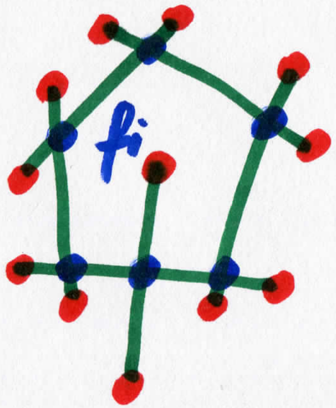
$\Rightarrow e \le 19n' + 19 = 19n$ KÉSZ.

Tegyük fel, hogy minden fokszám $d(v) \ge 20$.

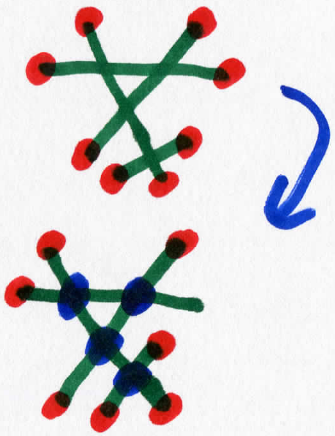
G: nincs  és minden fok ≥ 20.

Tegyünk a metszéspontokba is csúcsokat (új csúcsok) és darabold juk fel megfelelően az éleket. $\Rightarrow$ G' síkbarajzolt gráf. N csúcs (új+régi) E él, T tartomány

G' csúcsai	v_1	$\cdots$	v_N
fokok	d_1	$\cdots$	d_N
tartományok	f_1	$\cdots$	f_T
határoló élek száma	$\lvert f_1\rvert$	$\cdots$	$\lvert f_T\rvert$



$|f_i| = 8$



Súlyok:

$$s(v_i) = d_i - 4$$

$$s(f_i) = |f_i| - 4$$

összsúly:

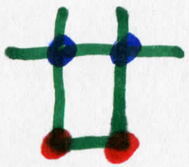
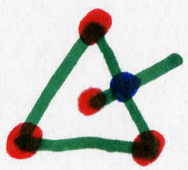
$$\sum_{1}^{N} s(v_i) + \sum_{1}^{T} s(f_i) = \sum_{1}^{N}(d_i - 4) + \sum_{1}^{T}(|f_i| - 4) =$$

$$= \sum_{1}^{N} d_i + \sum_{1}^{T} |f_i| - 4\sum_{1}^{N} 1 - 4\sum_{1}^{T} 1 = 2E + 2E - 4N - 4T =$$

$$= -4(N - E + T) = -8$$

Most 2 lépésben átrendezzük a súlyokat, minden súly ≥ 0 lesz. (→ ellentmondás)

Tartomány a-b-szög: határain (körbejárva) a régi, b-a új csúcs ($|f_i| = b$)

 2-4-szög  4-6-szög

Jelenleg: $d_i \geq 4$, tehát $s(v_i) = d_i - 4 \geq 0$ ✓

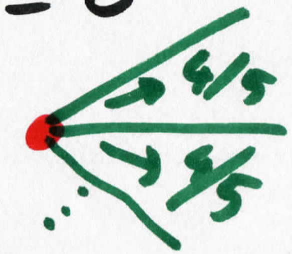
$s(f_i) = |f_i| - 4 \geq 0$, ha $|f_i| \geq 4$

Háromszögek: $s(f_i) = -1$

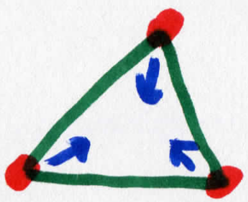
1. átrendezés: minden régi csúcs ad $4/5$ súlyt minden szomszédos tartománynak.

v_i régi csúcs: $s'(v_i) = s(v_i) - \frac{4d(v_i)}{5} = d_i - 4 - \frac{4d_i}{5} \geq 0$

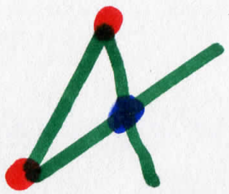
mert $d_i \geq 20$.



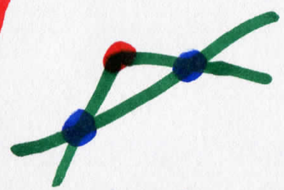
Háromszögek:



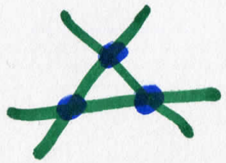
3-Δ: $-1 + 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$



2-Δ: $-1 + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$



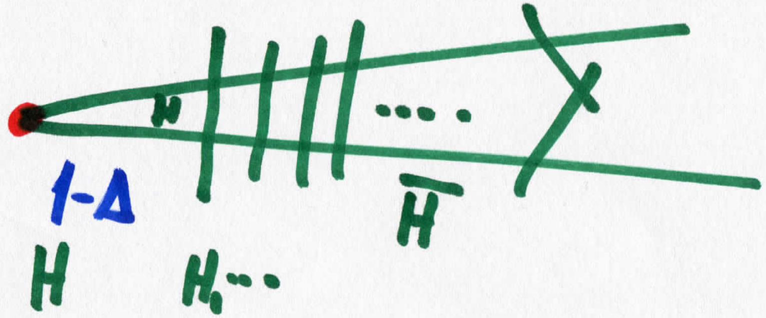
1-Δ: $-1 + \frac{4}{5} = -\frac{1}{5}$



0-Δ: NINCS

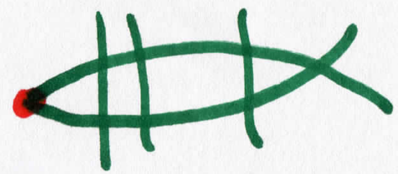
EZEKEN KELL MÉG SEGÍTEN

Def: 1-Δ segítője:



Két új csúcs oldalainak másik oldalán: H_1. Ha H_1 0-□, menjünk tovább szembe oldalon .... $\overline{H}$ <u>nem</u> 0-□

0-□ súlya $s' = 0$, nem tud segíteni.



$\overline{H}$: nem 0-□, de nem is háromszög!

2. átrendezés:

Minden 1-Δ kapjon 1/5 súlyt a segítőjétől.

Ekkor: Ha H 1-Δ: $s''(H)=0$.

Ha H 3-Δ, vagy 2-Δ: nem segítő:

$$s''(H) = s'(H) > 0$$

Ha H O-□ : nem segítő, $s''(H)=s'(H)=0$

Ha H négyszög de nem O-□: legfeljebb 4-szeres segítő;

$$s''(H)\geq s'(H)-\frac{4}{5}\geq 0$$

Ha H a-b-szög, b ≥ 5 : $s'(H)=b-4+\frac{4a}{5}$ és max b-szeres segítő: $s''(H)\geq b-4+\frac{4a}{5}-\frac{b}{5}\geq \frac{4}{5}b-4\geq 0$

Tehát: $s''(H)\geq 0$ minden tartományra, és

$s''(v)=s'(v)\geq 0$ minden csúcsra.

$0\leq \sum s'' = \sum s = -8$ ↯

$\Rightarrow$ nem lehet minden $d_i \geq 20$ $\Rightarrow$ van $d_i \leq 19$ $\Rightarrow$ lehet indukciózni $\Rightarrow$ $e\leq 19n$ KÉSZ