Sperner tétel

<u>Sperner (1928)</u> $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, nincs tartalmazás

$(A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \nsubseteq B)$

Ekkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

Ennyi el is érhető: vegyük az összes $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elemű részhalmazt.

LYM (Lubell, Yamamoto, Meshulam) **egyenlőtlenség:**

$\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, nincs tartalmazás $(A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \not\subseteq B)$

legyen f_k $\mathcal{F}$ k elemű halmazainak a száma.

Ekkor $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$

LYM $\Rightarrow$ Sperner:

$$1 \geq \sum_0^n \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \geq \sum_0^n \frac{f_k}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = \frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$$

LYM: nincs tartalmazás $\Rightarrow \sum \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$

Biz: $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \cdots \subset L_n$, $|L_i| = i$: Felszálló lánc

Pl $\emptyset, \{4\}, \{4,2\}, \{4,2,3\}, \{4,2,3,1\}$

Felszálló lánc $\Leftrightarrow$ alaphalmaz permutációja.

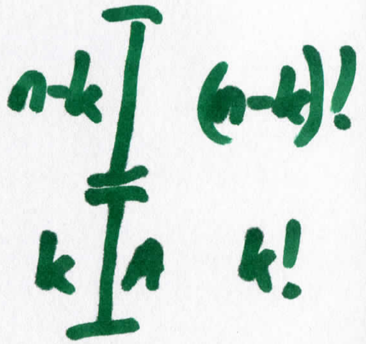
$\rightarrow$ $n!$ db felszálló lánc van.

Felszálló láncból max 1 halmaz $\in \mathcal{F}$
(mert nincs tartalmazás)

Ha $|A| = k$: A $k! \cdot (n-k)!$ felszálló láncban van benne.

$\Rightarrow \sum_{0}^{n} f_k \cdot k!\,(n-k)! \leq n!$

$\sum_{0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$ kész

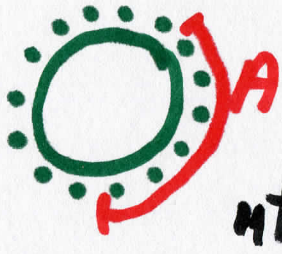


LYM-ben egyenlőség van $\Rightarrow$ minden halmaz egyforma méretű

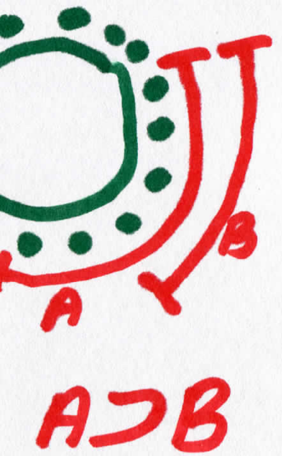
Spernerben egyenlőség van $\Rightarrow$ minden halmaz $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ méretű, vagy minden halmaz $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ méretű.

LYM, új bizonyítás:

π: ciklikus permutáció. Ív: $A \in \mathcal{F}$, és (egymás utáni elemek)



π rögzített: max n ív lehet: bármely 2 elem között csak 1 ív kezdődhet órajárás szerint:



Ha $|A| = k$: $k!(n-k)!$ ciklikus permutációban ív. Összesen $(n-1)!$ cikl. perm.

$\rightarrow \sum_{0}^{n} f_k \, k!(n-k)! \leq n \cdot (n-1)!$

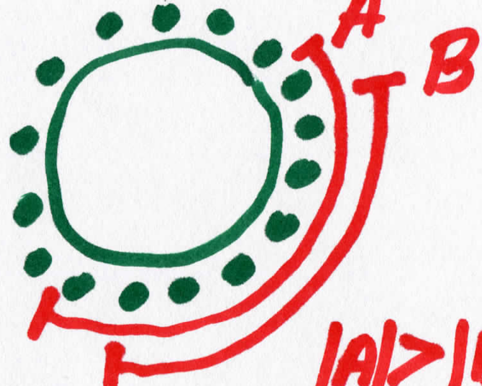
$\sum f_k / \binom{n}{k} \leq 1$

Tegyük fel, hogy egyenlőség van: $\sum \frac{f_k}{\binom{n}{k}} = 1$

$\Rightarrow$ minden cikl. permutációban pontosan n ív.

De: akkor ezek egyforma hosszúak!

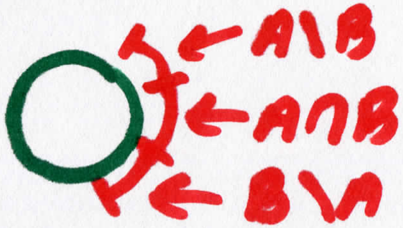
Ha nem, lenne ilyen:



$|A| > |B|$

$\Rightarrow A \supset B$ ↯

Viszont bármely 2 halmaz egyszerre ív egy cikl. permutációban:



$\Rightarrow$ minden halmaz egyforma nagy

Tegyük fel, hogy Spernerben egyenlőség van:

$$1 \geq \sum_{0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \geq \sum_{0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = \frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = 1$$

$\Rightarrow$ LYM-ben is egyenlőség van: egyformák a halmazok, mondjuk k méretűek

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Rightarrow k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ vagy } k = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

kész

Valós projektív sík: $[x, y, z]$: ekvivalencia osztályak:

$$(x, y, z) \equiv (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad \forall \lambda \neq 0$$

ezek a pontok. (kivéve $[0,0,0]$)

$[a, b, c]$: ekvivalencia osztályok:

$$(a, b, c) \equiv (\lambda a, \lambda b, \lambda c) \quad \forall \lambda \neq 0$$

ezek az egyenesek (kivéve $[0,0,0]$)

Illeszkedés: $ax + by + cz = 0$ (mindegy melyik reprezentánst vesszük) ugyanez <u>mod p</u> (p prím) $\Rightarrow$

pontok: $[x,y,z]$ ekviv. osztályok, $(x,y,z) \equiv (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

kivéve $[0,0,0]$

egyenesek: $[a,b,c]$ ekviv. oszt. kivéve $[0,0,0]$

illeszkedés: $[x,y,z]$ rajta van $[a,b,c]$-n $\Leftrightarrow$

$ax+by+cz \equiv 0 \mod p$ (nem függ a reprezentánsoktól)

$\frac{p^3-1}{p-1} = p^2+p+1$ pont / egyenes

1 egyenesen $p+1$ pont, 1 ponton $p+1$ egyenes.

2 pont $\rightarrow$ 1 egyenes 2 egyenes $\rightarrow$ 1 metszéspont.

<u>p-edrendű projektív sík</u>

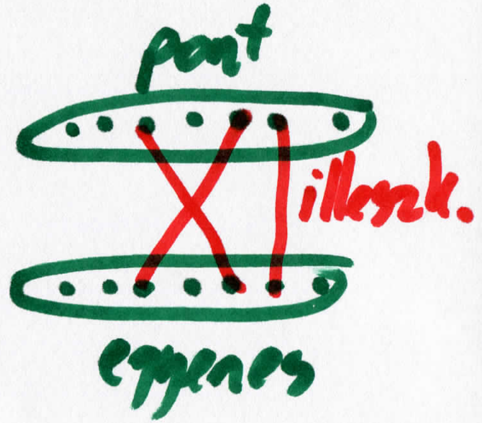
Fischer: $\mathcal{F} \subseteq 2^n$, $\forall A, B$: $|A \cap B| = \lambda$ $(\lambda > 0) \Rightarrow |\mathcal{F}| \leq n$

EdB: $\mathcal{F} \subseteq 2^n$, $\forall A: |A| \geq 2$, bármely 2 elemen pontosan halmaz
$\Rightarrow |\mathcal{B}| = 1$ vagy $|\mathcal{F}| \geq n$.

Mindkettő pontos: $n = p^2 + p + 1$, alaphalmaz:
véges geometria pontjai.
Halmazok: egyenesek ponthalmazai:
$n = p^2 + p + 1$ halmaz,
$\forall A, B: |A \cap B| = 1$, és
bármely 2 ponton pontosan 1 egyenes.

Erdős-Kővári-Sós-Turán: G n csúcsú gráf, nincs benne $C_4 \Rightarrow |E(G)| \leq c \cdot n^{3/2}$.

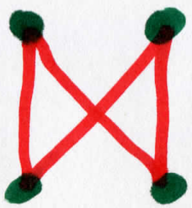
<u>Ez is pontos.</u> G: páros gráf, csúcsok: véges geometria pontjai ill. egyenesei. Él: illeszkedés.



$n = 2(p^2+p+1)$ csúcs.

minden pont foka $p+1$ (1 ponton $p+1$ egyenes, 1 egyenesen $p+1$ pont)

$$|E(G)| = (p+1)(p^2+p+1) \approx c \cdot n^{3/2}$$

<u>És nincs C_4</u> :  $\leftarrow$ 2 ponton át 2 egyenes $\lightning$

Kész.