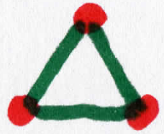
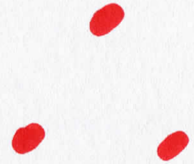
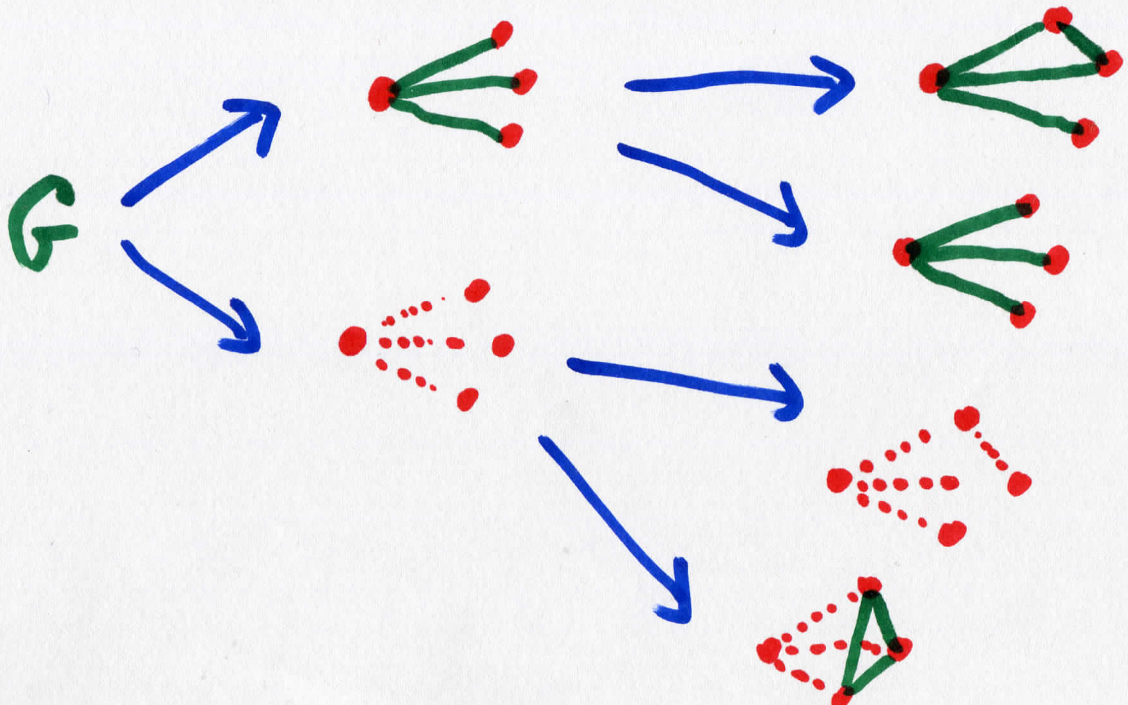
Ramsey tétel

Áll: minden 6 csúcsú gráfban van  vagy 

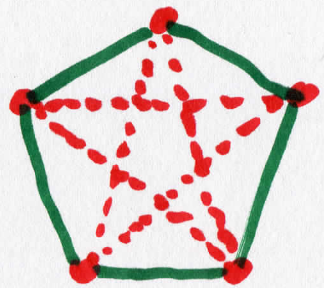
Biz: v egy csúcs. Vagy 3 szomszéd, vagy 3 nem-szomszéd.

3 szomszéd: vagy van köztük él ✓ vagy nincs ✓

3 nem-szomszéd: vagy van köztük nem-él ✓ vagy nincs ✓



5 csúccsal nem igaz:



Ramsey 1930: minden $k, \ell \geq 2$-re létezik olyan (legkisebb) $R(k,\ell)$ amelyre:
Minden $R(k,\ell)$ csúcsú gráfban van teljes k-as vagy üres ℓ-es.

Előző példa: $R(3,3) = 6$

Ramsey biz (Erdős-Szekeres)
belátjuk, hogy $R(k,\ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1} = \binom{k+\ell-2}{\ell-1}$

Indukció k, ℓ-re.

Lemma: $k, \ell \geq 3$: $R(k,\ell) \leq R(k-1,\ell) + R(k,\ell-1)$

Lemma biz: G : $R(k-1,\ell) + R(k,\ell-1)$ csúcsú gráf. $\overset{}{\underset{\text{kell}}{\Longrightarrow}}$ van benne teljes k-as, vagy üres ℓ-es.

v egy csúcs. vagy van $R(k-1,\ell)$ db szomszéd (1)
vagy $R(k,\ell-1)$ nem-szomszéd.

(1): $R(k-1,\ell)$ db szomszéd: $\nearrow$ $k-1$-es teljes, $+v$: k as teljes G-ben
$\searrow$ ℓ-es üres : ℓ-es üres G-ben

(2) $R(k,\ell-1)$ db nem-szomszéd: $\nearrow$ k-as teljes : k-as teljes G-ben
$\searrow$ $\ell-1$-es üres, $+v$: ℓ-es üres G-ben

LEMMA KÉSZ

$$R(k,\ell) \le R(k-1,\ell) + R(k,\ell-1). \quad R(2,\ell) = \ell, \quad R(k,2) = k$$

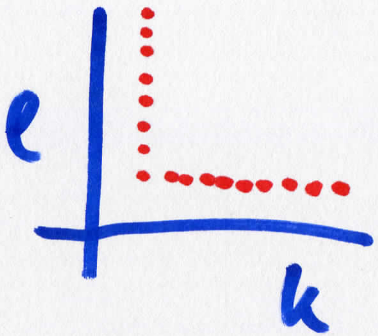
$$\binom{k+\ell-2}{k-1} = \binom{k+\ell-3}{k-2} + \binom{k+\ell-3}{k-1} \qquad \binom{2+\ell-2}{1} = \ell \qquad \binom{k+2-2}{k-1} = k$$

mert $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{R(k,\ell) \le \binom{k+\ell-2}{k-1}}$$

így néz ki az indukció:



ind. lépés:

k vagy $\ell = 2$: igaz.

$$R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1} < 2^{2k-2} = 4^{k-1}$$

Pontosabban: $\approx \dfrac{4^k}{\sqrt{k}}$

Legjobb ismert felső korlát: $\approx \dfrac{4^k}{k}$

Tetszőleges gráf $\rightarrow$ teljes k-as vagy üres l-es

$\Leftrightarrow$ teljes gráf, élek piros/kék $\rightarrow$ piros teljes k-as vagy kék teljes l-es

m színnel: $R(k_1 \cdots k_m)$: legkisebb R: R csúcsú teljes gráf, élek m színnel kiszínezve $\Rightarrow$ valamilyen i-re van i színű teljes k_i-s.

$$R(k_1 \cdots k_m) \leq R(k_1-1, k_2 \cdots k_m) + R(k_1, k_2-1, \cdots k_m) + \cdots R(k_1 \cdots k_m-1)$$

$$\rightarrow R(k_1 \cdots k_m) \leq \left(\sum (k_i-1)\right)! \Big/ \prod (k_i-1)!$$

Alsó korlát $R(k,k)$-ra : $R(k,k) \geq 2^{k/2}$ $k \geq 3$

Tfh $\underline{n < 2^{k/2}}$

$g_n = 2^{\binom{n}{2}}$: n csúcsú gráfok az 1,2 ... n csúcsokon

$g_{n,k} \leq \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}$: amelyekben van teljes k-as.

$$\frac{g_{n,k}}{g_n} \leq \binom{n}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} < \frac{n^k}{k! \cdot 2^{\binom{k}{2}}} < \frac{2^{k^2/2 - \binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ n csúcsú gráfoknak (SOKKAL) kevesebb, mint felében van <u>teljes k-as</u>. Ugyanez <u>üres k-asra</u> is igaz!

$\Rightarrow$ van n csúcsú gráf, amiben egyik sincs.

$\Rightarrow$ $\underline{R(k,k) \geq 2^{k/2}}$

<u>Valószínűségi módszer</u>

Legjobb ismert korlát: $\sim k \cdot 2^{k/2}$

Explicit példa ?

Sokkal kisebb

p-esekre: $R_p(k_1 \dots k_t)$: legkisebb R, amelyre:

R elemű halmaz p-eseit kiszínezzük az $1, 2 \dots t$ színekkel

$\Rightarrow$ valamilyen i-re van k_i elem, amelyen az összes

$\binom{k_i}{p}$ p-es i-színű.

$$R_p\underbrace{(n, n \dots n)}_{t} \le \left.2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{t\cdot n}}}}}}}\right\}p$$

Schur 1916: Minden t-re van N_t: $1, 2 \cdots N_t$ számokat kiszínezzük t színnel $\Longrightarrow$ van egyszínű x, y, z amelyre

$$x + y = z$$

Biz: Leggyen $N = R(\underbrace{3, 3 \cdots 3}_{t})$

$1, 2 \cdots N$ t színnel $\Longrightarrow$ K_N teljes gráf élei t színnel

$|i-j|$ színe $\longrightarrow$ $v_i v_j$ színe

$\Downarrow$ $N = R(\underbrace{3, \cdots 3}_{t})$

van egyszínű Δ

$c - b = x$ $b - a = y$

$c - a = z$ $\Longleftarrow$ $a < b < c$ $v_a v_b$ $v_a v_c$ $v_b v_c$ i-színű

$x + y = z$, x, y, z i-színű

Van der Waerden 27: Minden t, n-re van N:

$1, 2 \cdots N$ számok t színnel $\Longrightarrow$ van egyszínű n elemű számtani sorozat.

Összes természetes szám t színnel $\Longrightarrow$ akármilyen hosszú egyszínű számtani sorozat van.

Végtelen hosszú nem biztos, hogy van!

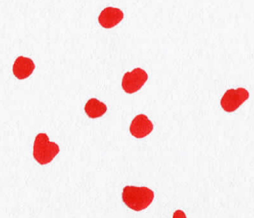
Szemerédi 1975: Természetes számok pozitív sűrűségű részhalmaza $\Longrightarrow$ akármilyen hosszú számtani sorozat van benne.

Erdős–Szekeres 1935: Minden n-re van (legkisebb) $F(n)$:

$F(n)$ pont a síkon, nincs 3 egy egyenesen

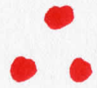
$\Longrightarrow$ van köztük n konvex helyzetben.

konvex

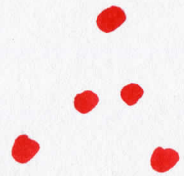


nem konvex

$F(3) = 3$



$F(4) = 5$



$F(5) = 9$ $\qquad F(n) \approx 2^n$

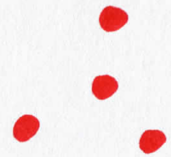
Biz (Johnson) $F(n) \le R_3(n,n)$

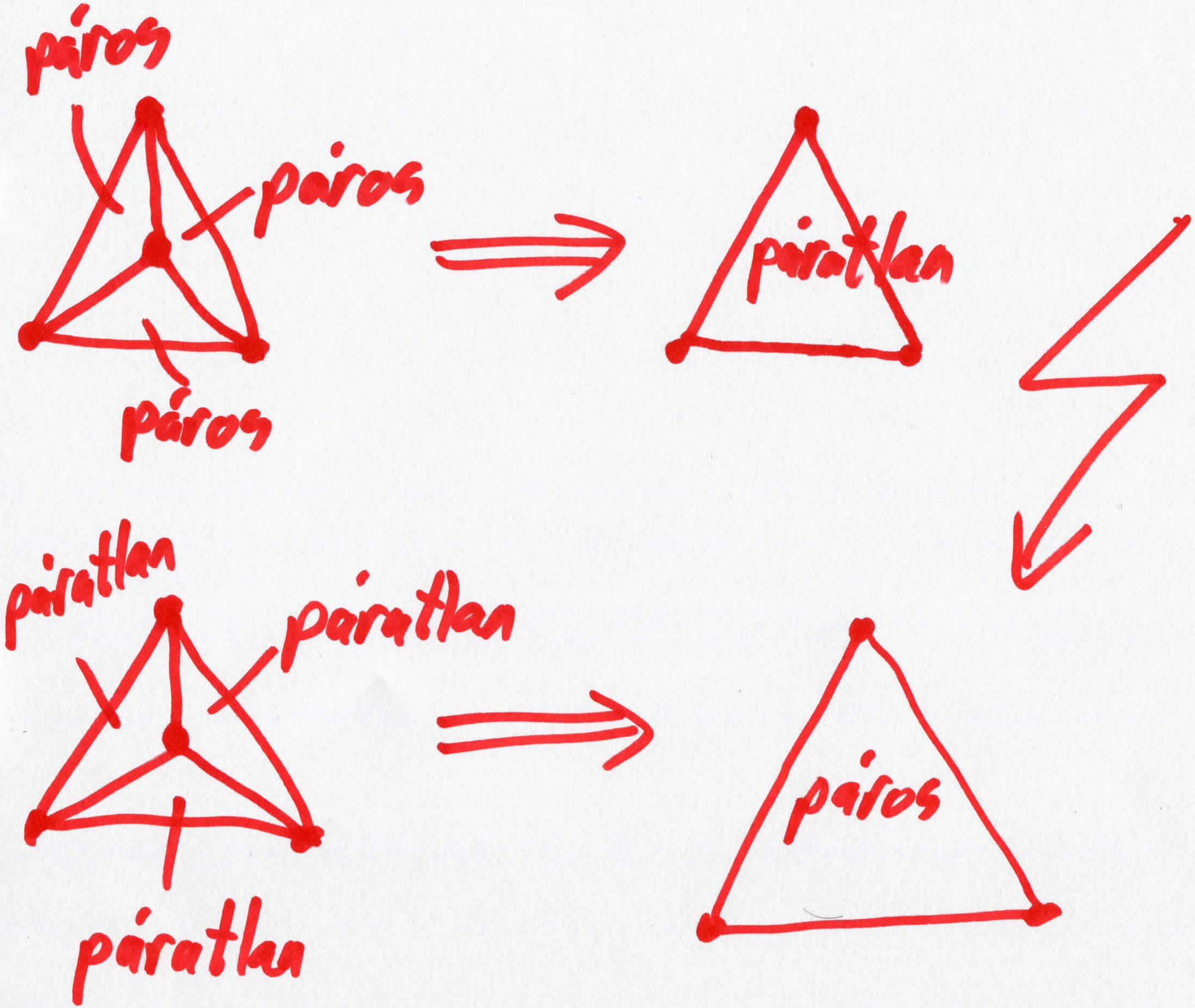
Biz: $R_3(n,n)$ pont, hármasokat színezzük:

$\Longrightarrow$ Van n pont: összes hármas egyforma színű.

$\Longrightarrow$ konvex helyzetben vannak!

Ha nem lennének konvex helyzetben: lenne négy:





$\Rightarrow$ konvex helyzetben vannak!