Perfekt gráfok

$\omega(G)$: klikkszám, max teljes részgráf mérete
$\chi(G)$: kromatikus szám.

Tudjuk: minden G-re $\underline{\chi(G) \geq \omega(G)}$
(mert teljes gráf krom. száma $\chi(K_m) = m$)

Shift gráf, Zykov, Myczielski, stb: lehet $\omega = 2$, $\chi \to \infty$.

Milyen gráfokra egyenlők?

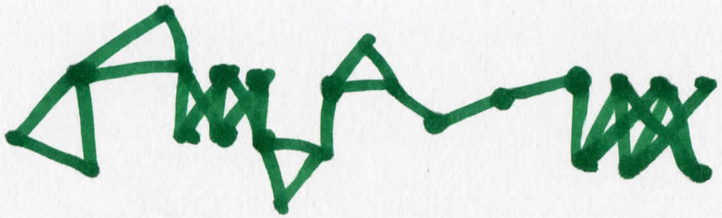
Milyen G-re lesz $\chi = \omega$? G tetszőleges.

G  K_m : $\chi = m$, $\omega = m$ $\Longrightarrow$ „érdektelen" kérdés

Milyen G-re igaz, hogy $\chi = \omega$, és minden részgráfjára is?

C_{2k+1} $(k \geq 2)$: $\chi = 3$ $\omega = 2$

$\Longrightarrow$ G nem tartalmazhat páratlan kört (kivéve háromszöget) $\Longrightarrow$ „majdnem" páros gráfok!



ez se túl érdekes...

Feszített részgráf: $V(G') \subseteq V(G)$, ha $x, y \in V(G')$,
x, y szomszédos G'-ben $\Longleftrightarrow$ szomszédos G-ben.

Berge 63: G <u>perfekt:</u> minden G' <u>feszített</u> részgráfra
$\chi(G') = \omega(G')$
(speciálisan: $\chi(G) = \omega(G)$)

K_n : perfekt. üres gráf: perfekt.
páratlan kör: <u>nem</u> perfekt.
tartalmaz <u>feszített</u> páratlan kört: nem perfekt.
(≥ 5 hosszú)

Minden páros gráf perfekt:

Feszített részgráfok is páros gráfok.

Elég: G páros gráf $\Rightarrow \chi(G) = \omega(G)$

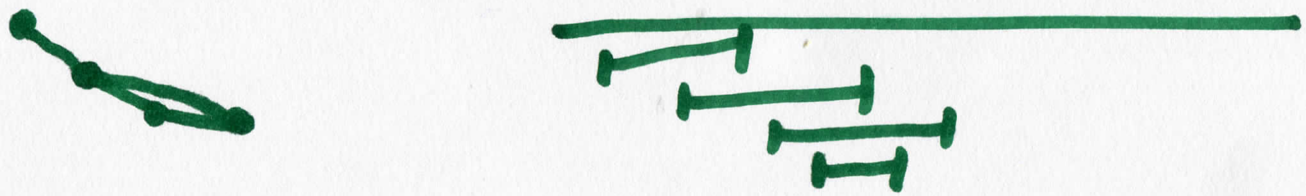
Triviális!

Ha G-nek van éle: $\chi(G) = \omega(G) = 2$

Ha nincs: $\chi(G) = \omega(G) = 1$

Intervallum gráf: csúcsok $\longleftrightarrow$ intervallumok egy egyenesen

élek $\longleftrightarrow$ intervallumok metszik egymást.



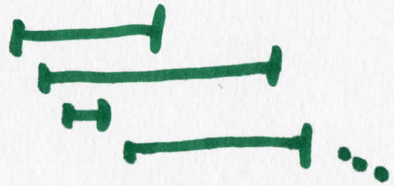
Minden intervallum gráf perfekt.

Intervallum gráf feszített részgráfja is intervallum gráf.

$\longrightarrow$ elég: G intervallum gráf $\Rightarrow \chi(G) = \omega(G)$.

G intervallum gráf, $\omega(G) = k$ Áll: ki tudjuk színezni k színnel az intervallumokat (csúcsokat)

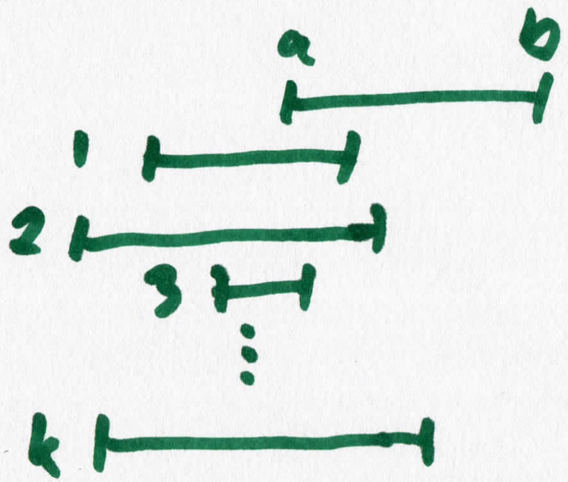
Színezés: MOHÓ, bal végpont szerint balról jobbra.



Mindig $1, 2, \dots k$ közül a legkisebb lehetséges szín.

Tfh elakadunk. $I = [a, b]$: semelyik szín se jó.

$\downarrow$



metszi $1, 2 \dots k$ színű, mind korábban kezdődik, mint a $\longrightarrow$ mind tartalmazza a-t!

I-vel együtt <u>$k+1$</u> metsző intervallum. $\lightning$

Tehát nem akadunk el. KÉSZ

$k \geq \chi \geq \omega = k \Rightarrow \chi = \omega$

Páros gráf komplementere is perfekt (majd gyakorlaton)

Páros gráf <u>élgráfja</u> is perfekt.

Megint: Páros gráf élgráfjának feszített részgráfja is páros gráf élgráfja.

Elég: G páros gráf élgráfja $\Longrightarrow \chi(G)=\omega(G)$.

H: páros gráf, G: élgráfja. $L(H)$

H

G

$\omega(G) = \Delta(H)$

König: $\chi(G)=\chi'(H)=\Delta(H)$ KÉSZ

Megjegyzés: minden H-ra $\Delta(H) \leq \chi'(H) \leq \Delta(H)+1$ Vizing

H páros: $\Delta(H)=\chi'(H)$ König

Intervallum gráf komplementere is perfekt.

csúcsok : intervallumok 

él : intervallumok diszjunktak. 

klikk : 

G: intervallumgráf komplementere, $\omega(G)=k$.

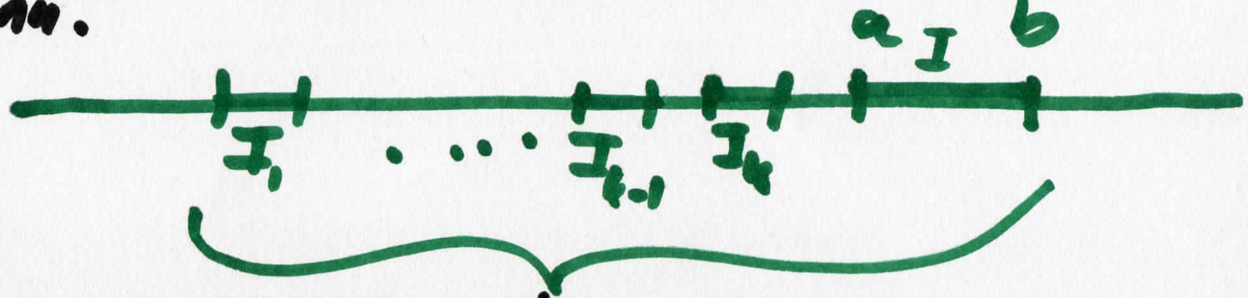
Áll: ki tudjuk színezni k színnel.

MOHÓ színezés, jobb végpont szerint balról jobbra, mindig legkisebb lehetséges szín $1,2\ldots k$-ból.

Tfh elakadunk: $I=[a,b]$: semelyik szín se jó.

$\rightarrow$ van előtte I_k k-színű.

miért k-színű? van előtte



I_{k-1} $k-1$-színű

$\vdots$

I_1 1-színű

$\longrightarrow$ $k+1$ diszjunkt intervallum!

$\omega(G)\geq k+1$ ↯ $\rightarrow$ nem akadunk el: $\chi=\omega=k$

Gyenge Perfekt Gráf Tétel (Lovász 72)

G perfekt $\Longleftrightarrow$ $\bar{G}$ perfekt

Erős Perfekt Gráf Tétel (Chudnovsky Robertson Seymour Thomas 2002)

G perfekt $\Longleftrightarrow$ nem tartalmaz feszített részgráfként ≥ 5 hosszú páratlan kört vagy komplementerét.