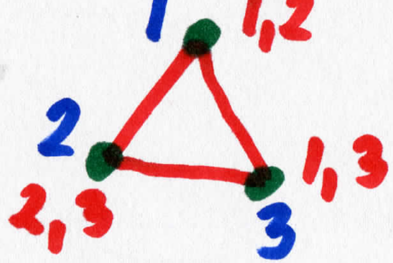
Listaszínezés

G gráf, minden v csúcshoz $L(v)$ színlista.

G L-színezhető: jól színezhető úgy hogy minden v csúcs színe $c(v) \in L(v)$



Listaszínezési szám $ch(G)$ = minimális listaméret, amiről még biztosan színezhető G.

min k : ha $\forall |L(v)| = k$ akkor G L-színezhető.

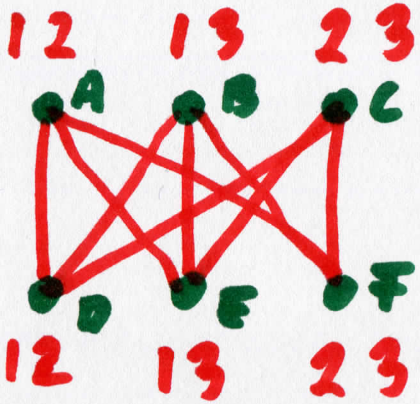
Vizing, Erdős - Rubin - Taylor

Minden G-re $ch(G) \geq \chi(G)$

Biz: ha egyformák a listák, akkor legalább $\chi(G)$ hosszúnak kell lenniük.

És ha különbözők a listák? Lehet ettől rosszabb a helyzet? **IGEN**

$K_{3,3}$: $\chi = 2$



2 hosszú listák, nem létezik jó L-színezés:

Biz: Feltehető: $c(A) = 1$

$\Rightarrow c(B) = 2,\ c(E) = 3$

$\Rightarrow$ C-t nem tudjuk kiszínezni!

Sőt: Minden k-ra van G: $\chi(G)=2$, $ch(G)>k$

Biz: $G = K_{\binom{2k-1}{k},\binom{2k-1}{k}}$ Ez páros gráf, kell: k hosszú lista minden csúcshoz, amelyekből G nem színezhető.

Vegyünk $2k-1$ db színt: $1, 2 \dots 2k-1$ $\Rightarrow$ $\binom{2k-1}{k}$ db szín-k-as van.

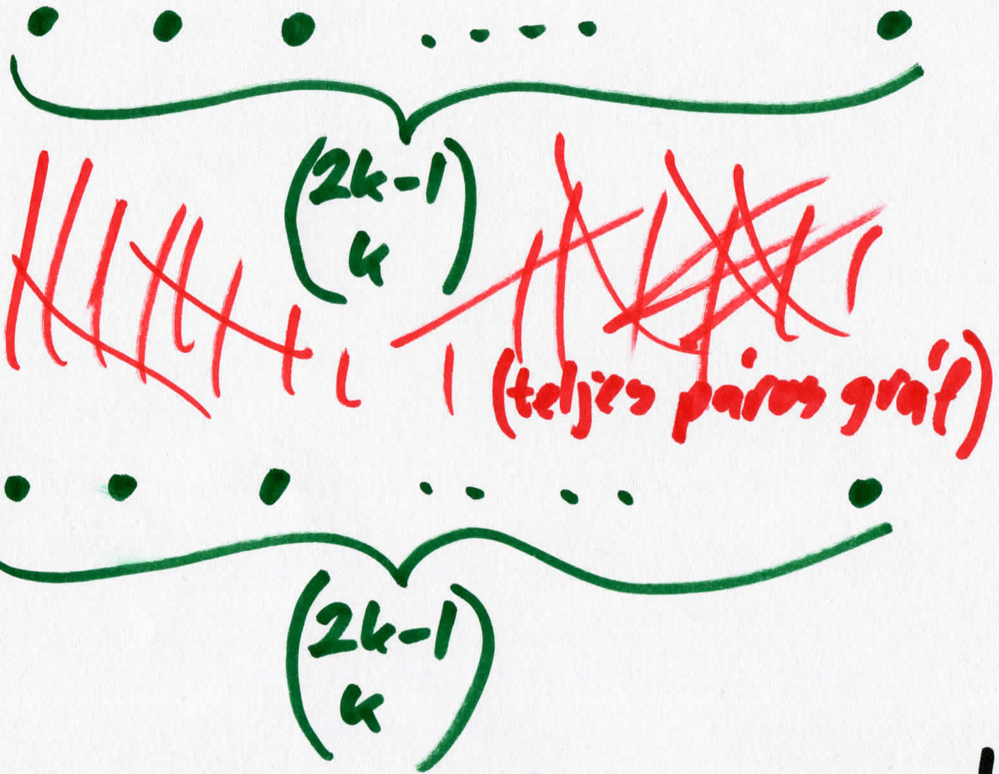
Felső csúcsok $\Longleftrightarrow$ szín k-asok

Alsó csúcsok $\Longleftrightarrow$ szín k-asok

($k=2$: pont az előző példa)

Tfh sikerült kiszínezni L-ről G-t.

L : szín k-asok



L : szín k-asok

Felső csúcsok: ÖSSZESEN legalább k színt használtunk.

Biz: ha csak k-1 színt használnánk, k szín kimaradna. De épp ez a k szín van valamelyik csúcs listáján!

Alsó csúcsok: ÖSSZESEN legalább k színt használtunk.

$\Downarrow$

Van egy felső és egy alsó csúcs, amik egyforma színűek! (összesen csak 2k-1* szín van)

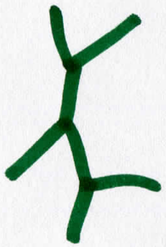
$\Rightarrow$ $ch(G) > k$

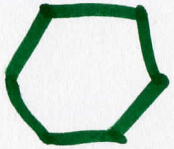
Minden G gráfra $ch(G) \leq \Delta(G)+1$ (szokásos mohó színezés)

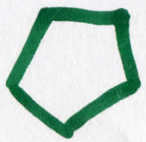
Sőt, Brooks is általánosítható:

G összefüggő, nem teljes és nem páratlan kör

$$\Longrightarrow \quad ch(G) \leq \Delta$$

Fák:  $\chi = ch = 2$

Páros kör:  $\chi = ch = 2$

Páratlan kör:  $\chi = ch = 3$

Listaszínezési sejtés: Ha G élgráf, akkor $\chi(G) = ch(G)$

Galvin: Ha G páros gráf, akkor $\chi(L(G)) = ch(L(G))$

König: Ha G páros gráf, akkor $\chi'(G) = \chi(L(G)) = \Delta(G)$

Galvin + König: G páros: $\Delta(G) = \chi'(G) = \chi(L(G)) = ch(L(G))$

Síkgráfok listaszínezési száma.

Négyszíntétel: G síkgráf $\Longrightarrow$ $\chi(G) \leq 4$

<u>Thomassen</u> 94 : G síkgráf $\Longrightarrow$ $ch(G) \leq 5$

<u>Voigt</u> 93 : Létezik G síkgráf, amire $ch(G) = 5$

(130 csúcsú példa)

<u>Mirzakhani</u> 96 : 63 csúcsú példa, amire ráadásul

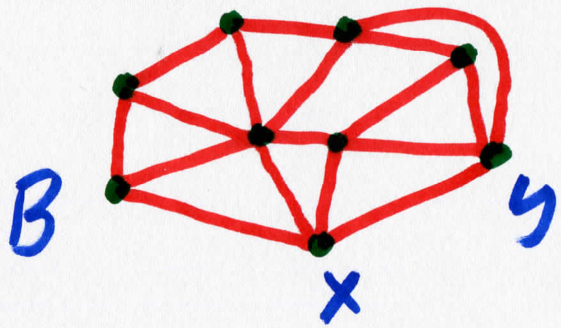
$\chi = 3$

Thomassen: G síkgráf: $ch(G) \leq 5$.

Biz:

G majdnem háromszögelt: külső tartomány határa <u>kör</u>
korlátos tartományok: háromszögek.

Lemma: G majdnem háromszögelt,
B: külső tart. határa,
x, y szomszédos B-n.



$L(x) = \alpha$, $L(y) = \beta$ $\alpha \neq \beta$ (1 elemű listák)
B-n minden további csúcs listája 3 elemű
Belső pontok listája 5 elemű.

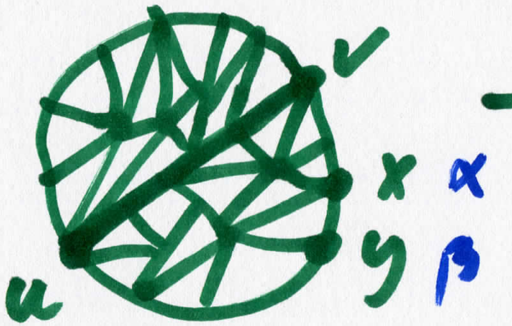
$\Longrightarrow$ G kiszínezhető a listákról.

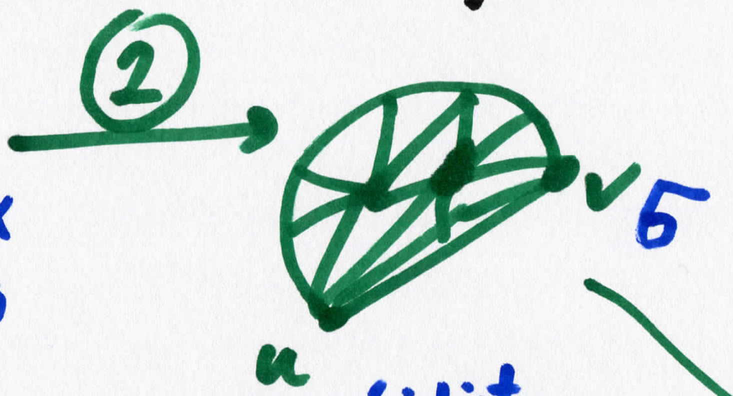
Lemma $\Rightarrow$ Tétel: G síkgráf, adjunk hozzá éleket $\rightarrow$ majdnem háromszögelt. Külső csúcsok listáját csökkentsük $5 \rightarrow 1$ illetve $5 \rightarrow 3$.

Lemma: listákról színezhető. Ez jó az eredetire is.

Lemma biz: indukció csúcsszámra. $n = 3$: trivi:
Tfh $n > 3$, kevesebbre már megvan.

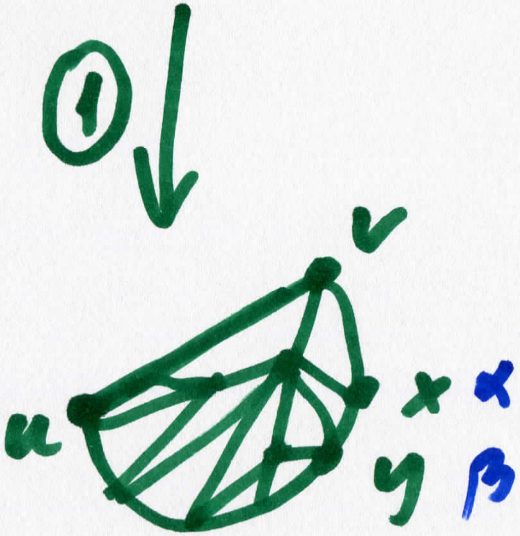
1. eset: B-nek van átlója.



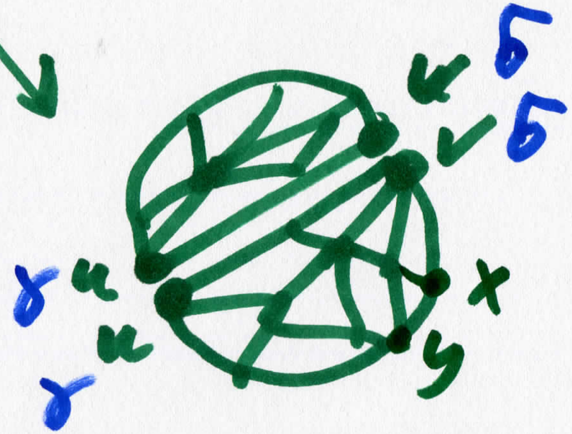


új lista:
γ ill. σ

indukció: kiszínezzük a listákról.

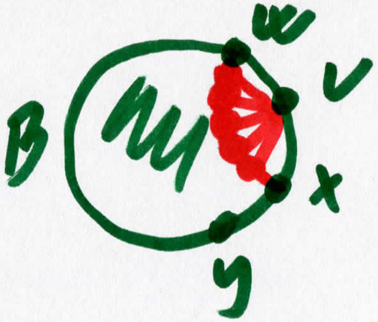


Indukció:
kiszínezzük a listákról
u: γ v: σ



összerakjuk ✓

2. eset: B-nek nincs átlója.



v: x másik szomszédja B-n.

v szomszédai: út. $\Longrightarrow$

$G \setminus v$: majdnem háromszögelt

v listája $L(v)$: 3 szín $\Rightarrow$ van 2, $\gamma\ \delta \neq \alpha$

Töröljük γ-t és δ-t $v_1 \cdots v_t$ listáiról!

(Ha v_i listáján valamelyik eleve nem szerepel, töröljünk mást)

$G' = G \setminus v$ indukció: színezhető a listákról!

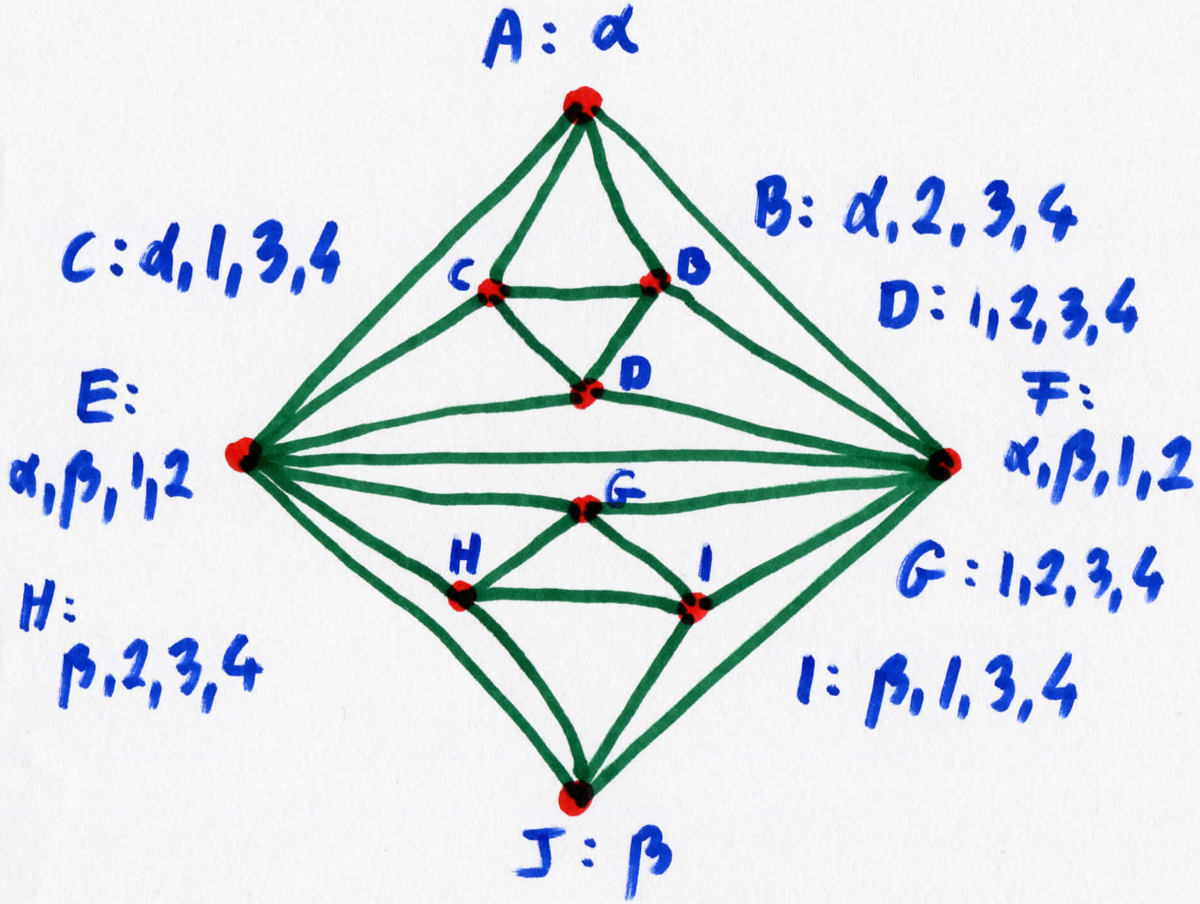
Tegyük vissza v-t : $x, v_1 \cdots v_t$: nem γ, δ színű.

w : lehet γ vagy δ, de csak az egyik!

másik jó v színének

KÉSZ

Voigt: G síkgráf + L 4 hosszú listák, G nem színezhető L-ről.



E és F 1 és 2 színű.

Tfh <u>E 1</u> <u>F 2</u>

⇒ C, B 3 és 4 színű

⇒ D-t nem tudjuk kiszínezni!

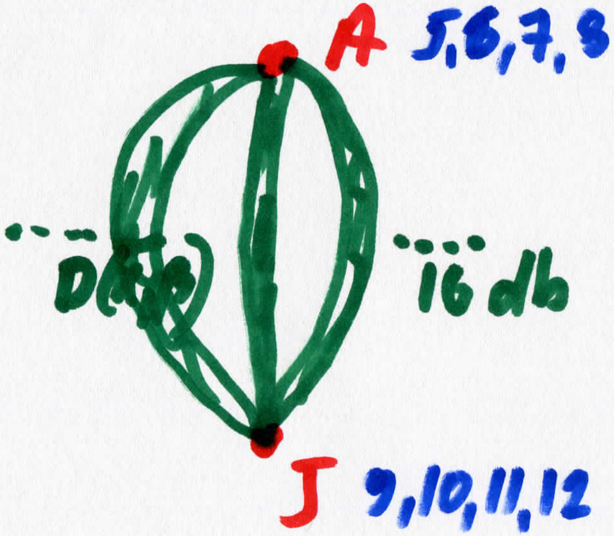
Ha <u>E 2</u> <u>F 1</u>: ugyanígy alsó résszel.

Majdnem kész, de A és J: 1 hosszú a lista.

Ez a gráf + listák: D(α, β)

16 db gráf: $D(\alpha,\beta)$: $\alpha\in\{5,6,7,8\}$, $\beta\in\{9,10,11,12\}$

Ragasszuk őket össze az A-csúcsoknál és J-csúcsoknál:



$\Longrightarrow$ síkgráf, $16\cdot 8+2=130$ csúcs.

Tfh sikerült kiszínezni. A: α J: β

Nézzük $D(\alpha,\beta)$-t: nem színezhető! (Előbb láttuk) ↯

KÉSZ